

Για την επεξεργασία των θεμάτων δεν απαιτούνται σημειώσεις, βιβλία ή άλλα βοηθήματα - όμως ή χρήση τους, εφόσον είναι αυστηρά άτομική, δεν απαγορεύεται. Απαντήσεις οι οποίες ανταποκρίνονται όρθα στα έρωτήματα βαθμολογούνται με το ποσοστό σε παρένθεση. Δεν βαθμολογούνται επεξηγήσεις, λεπτομέρειες ύπολογισμών, αναπαραγωγές ή άποσπάσματα από σημειώσεις, λύσεις εξετάσεων κλπ. οι οποίες δεν ζητούνται. Όλα τα μεγέθη είναι στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων, εκτός εάν ρητᾶ αναφέρεται άλλο (π.χ. deg, rot κλπ.) Το παρόν φύλλο έκφώνησης κατατίθεται μαζί με τη γραπτό (έπιστρέφεται). Η διάρκεια τῆς εξέτασης είναι 120 λεπτά.

**Θέμα 1 (40)**

Ένας τρισδιάστατος μηχανισμός αποτελούμενος από τρεις συνδέσμους περιγράφεται σύμφωνα με τῆ σύμβαση DH (Denavit-Hartenberg) από τις κατωτέρω παραμέτρους

Σύνδεσμος	a (μήκος)	β (στρέψη)	d (περιθώριο)	θ (γωνία)
L1	0.8	0	0	θ1
L2	0	0	d2	0
L3	0.8	0	0	θ3

1α(20). Απεικονίστε προσεγγιστικά τῆ γεωμετρική μορφή τοῦ μηχανισμού στο χῶρο (στο σύστημα συντεταγμένων τῆς βάσης L0).

1β(20). Έστω σημείο S με θέση (1,-0.2,1) στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων τοῦ συνδέσμου L3. Υπολογίστε τῆ θέση τοῦ σημείου στο σύστημα συντεταγμένων τῆς βάσης ὅταν οι ἄρθρώσεις τοῦ μηχανισμού ἔχουν τιμές θ1=-30deg, d2=1.2 και θ3=30deg.

**Θέμα 2 (30)**

Το ἄκρο έργασίας ἐνός BPB κινεῖται σε εὐθύγραμμη τροχιά ή ὁποία διέρχεται από τα ἐξῆς σημεία, στις ἀναφερόμενες χρονικές στιγμές ὡς κατωτέρω

Σημείο:	A	B	Γ	Δ	E
θέση [cm]	0.5	1.8	4.1	5.9	9.7
χρόνος	0.0	0.2	0.5	0.9	1.4

2α(10). Υπολογίστε κατάλληλες πολυωνυμικές τροχιές παρεμβολῆς (ἐλεύθερη μεταβλητή ὁ χρόνος t) χωριστᾶ για τὸ τμήμα {A, B, Γ} και για τὸ τμήμα {Γ, Δ, E}.

2β(20). Χρησιμοποιεῖστε τις πολυωνυμικές ἐκφράσεις για να ὑπολογίσετε τῆν τιμή τῆς ἐπιτάχυνσης τοῦ ἄκρου έργασίας ὅταν διέρχεται από τὸ κοινὸ σημείο Γ (τελευταῖο σημείο τοῦ πρώτου τμήματος και πρώτο τοῦ δεύτερου). Ὑποθέσατε ὅτι, κατά τῆ διέλευση από τὸ σημείο Γ, οι κινήσεις τοῦ BPB ἐνεργοποιούνται για χρονικὸ διάστημα 0.2.

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟ ΜΕΡΟΣ**

**Θέμα 3 (30)**

Ο μηχανισμός ἐνός ρομποτικοῦ βραχίονα περιγράφεται στο ἐπίπεδο {xy} από κινηματική ἄλυσίδα ὡς ἀκολουθως (γωνίες θετικές Ἀντίθετα με Φορὰ Δεικτῶν τοῦ Ὁρολογίου):

Στοιχείο	Μέγεθος	Παρατηρήσεις
L0 Βάση		Ἀποκλείει τῆν περιοχή $x+y \leq 0$
A1 Στροφική ἄρθρωση	$0 \leq q1 \leq \pi/2$	μετρούμενη από ἡμιάξονα {0x}
L1 Σύνδεσμος	a	καταλήγει στην ἄρθρωση A2
A1 Στροφική ἄρθρωση	$\pi/2 \leq q2 \leq \pi$	μετρούμενη από τον ἄξονα του L1
L3 Σύνδεσμος	4	καταλήγει στο ἄκρο έργασίας AE

Υπολογίστε τῆ μέγιστη τιμή και τῆν ἐλάχιστη τιμή τῆς παραμέτρου a ἔτσι ὥστε ὁ χῶρος έργασίας να καλύπτει πλήρως δίσκο με ἄκτινα 0.5 και με κέντρο τὸ σημείο [3.2, 3.2]

## ΒΟΗΘΗΜΑ

Προσεγγιστικές εκφράσεις τριγωνομετρικών μεγεθών (γωνία  $\gamma$  σε rad,  $|\gamma| < 0.4$ ):

$$\sin(\gamma) \approx \tan(\gamma) \approx \gamma \quad \cos(\gamma) \approx 1 - \gamma^2/2$$

Τιμές της συνάρτησης ημιτόνου για χαρακτηριστικές γωνίες (σε rad):

$$\sin(\pi/8) \approx 0.383 \quad \sin(\pi/6) = 0.5 \quad \sin(\pi/4) \approx 0.707 \quad \sin(\pi/3) \approx 0.866$$

Επίλυση τριγώνου με πλευρές μήκους  $a$ ,  $b$  και εσωτερική γωνία  $\gamma$  έναντι της πλευράς  $c$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Τετραγωνική ρίζα αριθμών  $< 10$ :

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458$$

Διδιάστατο "εξωτερικό" ημι-επίπεδο περιοριζόμενο από γραμμή:

$ax + y > y_0$ , όπου  $y_0$  τεταγμένη στον άξονα  $\{y\}$  και  $-a$  η κλίση της γραμμής

$x + by > x_0$ , όπου  $x_0$  τεταγμένη στον άξονα  $\{x\}$  και  $-1/b$  η κλίση της γραμμής

$y(x_2 - x_1) - x(y_2 - y_1) > y_1x_2 - y_2x_1$ , για γραμμή διερχόμενη από  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$

Διδιάστατο "εξωτερικό" κύκλου:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R^2$ , για κύκλο με κέντρο το σημείο  $(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $R$

Σύμβαση DH για δεξιόστροφα ορθοκανονικά συστήματα  $S = \{Oxyz\} \rightarrow S' = \{O'x'y'z'\}$

μήκος  $a$ : απόσταση μεταξύ του άξονα  $\{z\}$  και της αρχής  $O'$

στρέψη  $\beta$ : γωνία μεταξύ του άξονα  $\{z\}$  και του άξονα  $\{z'\}$

περιθώριο  $d$ : απόσταση μεταξύ  $O$  και  $O'$ , μετρούμενη κατά τον άξονα  $\{z\}$

γωνία  $\theta$ : γωνία μεταξύ του άξονα  $\{x\}$  και του άξονα  $\{x'\}$ .

Μετασχηματισμός γενικευμένων συντεταγμένων - απεικόνιση σημείου (διανύσματος)  $p$  μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων  $S$  και  $S'$  δύο διαδοχικών συνδέσμων:

$$p(S) = H \cdot p(S'), \text{ όπου: } H = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \cdot \cos\beta & \sin\theta \cdot \sin\beta & a \cdot \cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \cdot \cos\beta & -\cos\theta \cdot \sin\beta & a \cdot \sin\theta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενική κινηματική σχέση μεταξύ διανύσματος  $N$  αρθρώσεων  $q = [q_1, \dots, q_N]^T$  και συντεταγμένων του άκρου εργασίας  $\underline{x} = [x, y, z]^T$  και σχετικός Ιακωβιανός πίνακας:

$$\underline{x} = f(q) = \begin{bmatrix} f_x(q) \\ f_y(q) \\ f_z(q) \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} \partial f_x / \partial q_1 & \partial f_x / \partial q_2 & \dots & \partial f_x / \partial q_N \\ \partial f_y / \partial q_1 & \partial f_y / \partial q_2 & \dots & \partial f_y / \partial q_N \\ \partial f_z / \partial q_1 & \partial f_z / \partial q_2 & \dots & \partial f_z / \partial q_N \end{bmatrix}$$

Ψευδοαντίστροφος Ιακωβιανός πίνακας (Moore-Penrose):  $J^\# = (J^T \cdot J)^{-1} \cdot J^T$