(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Ένας ρομποτικός βραχίονας αποτελείται από μηχανισμό που περιγράφεται στο επίπεδο {xy} από κινηματική αλυσίδα ως ακολούθως (γωνίες σε rad και μήκη σε m):

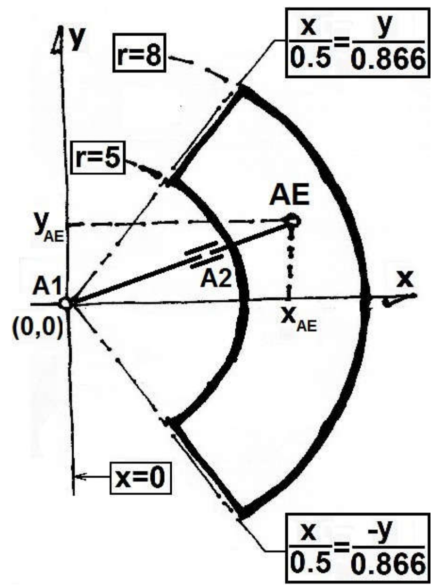
	Στοιχείο	*Μέγεθος*	*Παρατηρήσεις*
L0	βάση		όριο παράλληλο με {y}, αποκλείει $x<0$
A1	στροφική άρθρωση	$-\pi/3 \le q1 \le \pi/3$	γωνία q1, θετική Αντίθετα με ΦΔΩ
L1	σύνδεσμος	2	καταλήγει στην άρθρωση A2
A2	πρισματική άρθρωση	$-1 \le q2 \le 2$	μετατόπιση q2, κατά τον άξονα του L1
L2	σύνδεσμος	4	καταλήγει στο άκρο εργασίας AE

Θέμα 1ο (40)

1α(20). Δώστε την αναλυτική (μαθηματική) περιγραφή και σχεδιάστε την προσεγγιστική γεωμετρική μορφή του Χώρου Εργασίας στο επίπεδο {xy}.

$x^2 + y^2 \le 64$ (α)
$x^2 + y^2 \ge 25$ (β)
$0.866\ x \ge 0.5\ y$ (γ)
$0.866\ x \ge -0.5\ y$ (δ)
$x \ge 0$ (ε)

(α) «εσωτερικό» τόξου ακτίνας r=2+4+2, όταν η άρθρωση A2 βρίσκεται σε πλήρη έκταση
(β) «εξωτερικό» τόξου ακτίνας r=2+4-1, όταν η άρθρωση A2 βρίσκεται σε πλήρη συστολή
(γ) «θετικό» ημι-επίπεδο, οριζόμενο από γραμμικό όριο, όταν η άρθρωση A1 λαμβάνει ακραία τιμή π/3
(δ) «θετικό» ημι-επίπεδο, οριζόμενο από γραμμικό όριο, όταν η άρθρωση A1 λαμβάνει ακραία τιμή -π/3.
(ε) όριο του συνδέσμου L0 (αποφυγή εισχώρησης στη βάση).



1β(20). Διατυπώστε αναλυτική έκφραση για την ευθεία κινηματική σχέση: με δεδομένες τις τιμές των αρθρώσεων (q1,q2) να υπολογίζονται οι τιμές των συντεταγμένων (x,y) του Άκρου Εργασίας.

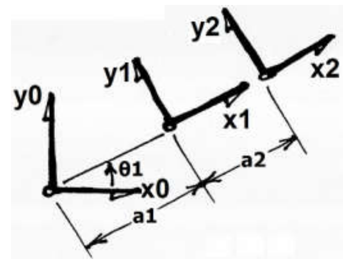
Το AE βρίσκεται σε απόσταση r=2+4+q2 από την αρχή των αξόνων {xy} και επάνω σε γραμμή με κλίση q1 η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως έχει συντεταγμένες:

$x = (6+q2)\cos(q1)$
$y = (6+q2)\sin(q1)$

Θέμα 2ο (30)

2α(10). Διατυπώστε τα μεγέθη του μηχανισμού με μορφή πίνακα παραμέτρων (μήκος, στρέψη, περιθώριο και γωνία) κατά τη σύμβαση Denavit-Hartenberg.

#	a	β	d	θ
L1	2	0	0	q1
L2	4+q2	0	0	0



Το σύστημα συντεταγμένων «1» προκύπτει από το σ.σ. «0» με μετάθεση μήκους a1=2 και περιστροφή με γωνία q1.

Το σύστημα συντεταγμένων «2» προκύπτει από το σ.σ. «1» με μετάθεση μήκους a2=4+q2, χωρίς περιστροφή (μόνο μετάθεση κατά τον άξονα {x1}).

2β(20). Θεωρείστε το ΑΕ με θέση (0, 0) στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του συνδέσμου L2. Υπολογίστε τη θέση του σημείου στο σύστημα συντεταγμένων της βάσης όταν οι αρθρώσεις του μηχανισμού έχουν τιμές q1=-π/4 και q2=+1.

(i) Με χρήση του αποτελέσματος στο ερώτημα (1β) ανωτέρω:

$x= (6+1) \cos(-\pi/4) =4.9 \quad \text{και} \quad y= (6+1) \sin(-\pi/4) =-4.9$

(ii) Με υπολογισμό των επι μέρους εμπλεκόμενων ομογενών μετασχηματισμών (απλοποιημένη μορφή για δύο διαστάσεις, καθόσον z=0 για κάθε σύνδεσμο):

$$H01 = \begin{vmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4)\cos(0) & 2\cos(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4)\cos(0) & 2\sin(-\pi/4) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.7 & 1.4 \\ -0.7 & 0.7 & -1.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

και

$$H12 = \begin{vmatrix} \cos(0) & -\sin(0)\cos(0) & (4+1)\cos(0) \\ \sin(0) & \cos(0)\cos(0) & (4+1)\sin(0) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5.0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Σε γενικευμένες συντεταγμένες, το ΑΕ έχει θέση $[0,0,1]^T$ στο «τοπικό» σύστημα συντεταγμένων «2» και απεικονίζεται διαδοχικά στο σ.σ. «1» και κατόπιν στο σ.σ. «0» της βάσης, μέσω του γινομένου των παραπάνω μετασχηματισμών (πινάκων):

$$H01.H12.[0,0,1]^T = [4.9,-4.9,1]^T$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟ ΜΕΡΟΣ

Θέμα 3ο (30)

3α(10). Διατυπώστε αναλυτικά την αντίστροφη κινηματική σχέση, δλδ. δώστε μαθηματικές εκφράσεις ώστε, με δεδομένες τις τιμές των συντεταγμένων (x,y) του Άκρου Εργασίας, να υπολογίζονται οι τιμές των αρθρώσεων (q1,q2).

Για μια τυπική θέση (x,y) του ΑΕ στο εσωτερικό του Χώρου Εργασίας, η γωνία q1 (θέση της άρθρωσης Α1) είναι η κλίση της γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο (x,y) και από την αρχή των αξόνων. Επίσης, η μετατόπιση q2 (θέση της άρθρωσης Α2) καθορίζει το συνολικό μήκος του βραχίονα r=4+2+q2 το οποίο ισούται με την ακτινική απόσταση του σημείου (x,y) από την αρχή των αξόνων. Επομένως:

$$q1 = \operatorname{asin}(y/\sqrt{x^2+y^2})$$
$$q2 = -6+\sqrt{x^2+y^2}$$

3β(20). Αρχικά, οι αρθρώσεις του μηχανισμού έχουν τιμές $q1=\pi/6$ και $q2=-1$. Υπολογίστε τη μεταβολή (Δq1,Δq2) των τιμών των αρθρώσεων ώστε το Ἀκρο Εργασίας να μεταφερθεί από αυτήν την αρχική θέση στη θέση (6.1,3.5) με ακρίβεια ±0.2. Χρησιμοποιείστε μέθοδο της επιλογής σας (αναλυτική ή αριθμητική).

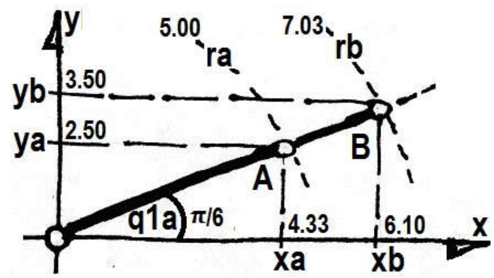
Έστω A η αρχική και B η τελική θέση του ΑΕ, αντίστοιχα, ως σχήμα παραπλεύρως. Στην αρχική θέση, η ακτινική απόσταση είναι ra=6+q2a= 6-1=5.0 και οι συντεταγμένες υπολογίζονται ως:

$$xa= (5.0)\cos(\pi/6) \approx (5.0)(0.866) = 4.33 \text{ και}$$

$$ya= (5.0)\sin(\pi/6) = (5.0)(0.5) = 2.50$$

Στην τελική θέση, οι συντεταγμένες είναι (xb,yb)=(6.1, 3.5) και η ακτινική απόσταση υπολογίζεται ως:

$$rb = \sqrt{xb^2+yb^2} = \sqrt{6.1^2+3.5^2} = \sqrt{49.46} \approx 7.03$$



Επομένως κατά τη μεταφορά A→B, τα μεγέθη της θέσης του ΑΕ μεταβάλονται κατά:

$$\Delta x = xb-xa = 6.1 - 4.33 = 1.77$$

$$\Delta y = yb-ya = 3.5 - 2.5 = 1.00$$

$$\Delta r = rb-ra = 7.03 - 5.0 = 2.03$$

(i) ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Το ημίτονο της γωνίας q1b στην τελική θέση υπολογίζεται ως:

$$\sin(q1b) = yb/rb = (3.5)/(7.03) \approx 0.498 \approx \sin(\pi/6)$$

Δηλαδή, η γωνία διατηρεί, κατά προσέγγιση, την ίδια τιμή:

$$\Delta q1 \approx 0.0$$

Επίσης, η αλλαγή της ακτινικής απόστασης προέρχεται αποκλειστικά από αλλαγή της μεταβλητής q2. Επομένως, η τιμή της άρθρωσης q2 μεταβάλεται κατά:

$$\Delta q2 = \Delta r \approx 2.03$$

(ii) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Με χρήση του αποτελέσματος στο ερώτημα (1β) ανωτέρω:

$$x = (6+q2)\cos(q1)$$

$$y = (6+q2)\sin(q1)$$

Η τοπική «παράγωγος» $\partial \underline{x}/\partial \underline{q}$ της θέσης του ΑΕ ως προς τις μεταβλητές των αρθρώσεων οργανώνεται στον Ιακωβιανό πίνακα:

$$J = \begin{vmatrix} -(6+q2)\sin(q1) & \cos(q1) \\ (6+q2)\cos(q1) & \sin(q1) \end{vmatrix}$$

Ο πίνακας J δέχεται ψευδοαντίστροφο $J^{\#}$ ο οποίος υπολογίζεται ως:

$$J^{\#} = (J^T.J)^{-1}.J^T = \begin{vmatrix} -\sin(q1)/(6+q2) & \cos(q1)/(6+q2) \\ \cos(q1) & \sin(q1) \end{vmatrix}$$

Εφαρμόζοντας για τη αρχική θέση A:

$$J^{\#}(A) = \begin{vmatrix} -\sin(\pi/6)/(6-1) & \cos(\pi/6)/(6-1) \\ \cos(\pi/6) & \sin(\pi/6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.100 & 0.173 \\ 0.866 & 0.500 \end{vmatrix}$$

και η αναγκαία διόρθωση των μεταβλητών των αρθρώσεων υπολογίζεται προσεγγιστικά από τον όρο «πρώτης τάξης» $\Delta\underline{q} = J^{\#}.\ \Delta\underline{x}$, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \Delta q1 \\ \Delta q2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.100 & 0.173 \\ 0.866 & 0.500 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1.77 \\ 1.00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.004 \\ 2.033 \end{vmatrix}$$

Αυτή η πρώτη εφαρμογή της διαδικασίας διόρθωσης φέρνει το άκρο εργασίας στη θέση (3.541, 6.077), δηλαδή εντός της ζητούμενης προδιαγραφής ακρίβειας (δεν απαιτούνται επαναλήψεις του υπολογισμού).