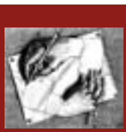
Α.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ Τ.Ε.



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ
Καθηγητής: Δ. ΔΗΜΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ
Καθ. Εφαρμογών: Σ. ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΟΥ

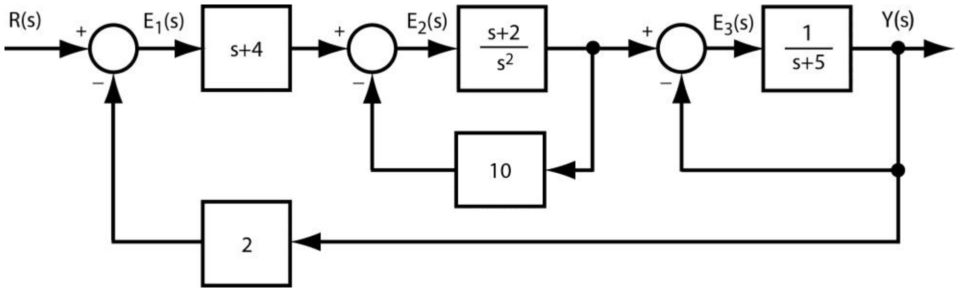
Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ

Ασκήσεις Πράξης

Εαρινό εξάμηνο 2015/16

Άσκηση 1 – Μόνιμα σφάλματα & ευστάθεια συστημάτων (29/03/16)

1. Δίνεται σύστημα με δεδομένο διάγραμμα βαθμίδων:



α) Βρείτε τα μόνιμα σφάλματα $e_{1\infty}$, $e_{2\infty}$ και $e_{3\infty}$ του συστήματος για βηματική είσοδο $r(t)=1$, καθώς και την τελική τιμή y_∞ της εξόδου.

β) Υπολογίστε την ολική συνάρτηση μεταφοράς του δεδομένου συστήματος και διερευνήστε την ευστάθειά του με το κριτήριο Routh.

Λύση

α) Από το διάγραμμα προκύπτουν οι εξισώσεις:

(1) $$E_1(s) = R(s) - \frac{2}{s+5}E_3(s)$$

$$(s+5)E_1(s) = (s+5)R(s) - 2E_3(s)$$

(2) $$E_2(s) = (s+4)E_1(s) - \frac{10(s+2)}{s^2}E_2(s)$$

$$s^2E_2(s) = s^2(s+4)E_1(s) - (10s+20)E_2(s)$$

$$(s^2+10s+20)E_2(s) = s^2(s+4)E_1(s)$$

(3) $$E_3(s) = \frac{s+2}{s^2}E_2(s) - \frac{1}{s+5}E_3(s)$$

$$s^2(s+5)E_3(s) = (s+2)(s+5)E_2(s) - s^2E_3(s)$$

$$s^2(s+6)E_3(s) = (s+2)(s+5)E_2(s)$$

(2) & (3) $$(s^2+10s+20)(s+2)(s+5)E_2(s) = s^2(s+4)(s+2)(s+5)E_1(s)$$

$$(s^2+10s+20)s^2(s+6)E_3(s) = s^2(s+4)(s+2)(s+5)E_1(s)$$

(4) $$E_3(s) = \frac{(s+4)(s+2)(s+5)}{(s+6)(s^2+10s+20)}E_1(s)$$

από (1) $$(s+5)E_1(s) = (s+5)R(s) - 2\frac{(s+4)(s+2)(s+5)}{(s+6)(s^2+10s+20)}E_1(s)$$

$$(1+2\frac{(s+4)(s+2)}{(s+6)(s^2+10s+20)})E_1(s)=R(s)$$

$$(s^3+18s^2+92s+136)E_1(s)=(s+6)(s^2+10s+20)R(s)$$

(5) $$E_1(s)=\frac{(s+6)(s^2+10s+20)}{s^3+18s^2+92s+136}R(s)$$

(4) & (5) $$E_3(s)=\frac{(s+4)(s+2)(s+5)}{s^3+18s^2+92s+136}R(s)$$

(3) & (4) $$(s+2)(s+5)E_2(s)=\frac{s^2(s+6)(s+4)(s+2)(s+5)}{s^3+18s^2+92s+136}R(s)$$

$$E_2(s)=\frac{s^2(s+6)(s+4)}{s^3+18s^2+92s+136}R(s)$$

Και $$Y(s)=\frac{1}{s+5}E_3(s)$$

ή $$Y(s)=\frac{(s+4)(s+2)}{s^3+18s^2+92s+136}R(s)$$

Για $r(t)=1$ και $R(s)=\frac{1}{s}$ έχουμε από το θεώρημα τελικής τιμής Laplace:

$$e_{1\infty}=\lim_{s\to 0}sE_1(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{(s+6)(s^2+10s+20)}{s^3+18s^2+92s+136}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+6)(s^2+10s+20)}{s^3+18s^2+92s+136}=\frac{120}{136}=0.88$$

$$e_{2\infty}=\lim_{s\to 0}sE_2(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s^2(s+6)(s+4)}{s^3+18s^2+92s+136}\cdot\frac{1}{s}=0$$

$$e_{3\infty}=\lim_{s\to 0}sE_3(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{(s+4)(s+2)(s+5)}{s^3+18s^2+92s+136}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+4)(s+2)(s+5)}{s^3+18s^2+92s+136}=\frac{40}{136}=0.29$$

$$y_{\infty}=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{(s+4)(s+2)}{s^3+18s^2+92s+136}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+4)(s+2)}{s^3+18s^2+92s+136}=\frac{8}{136}=0.058$$

β) Η ολική συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(s+4)(s+2)}{s^3+18s^2+92s+136}$$

Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο προκύπτει ο πίνακας Routh:

3	1 92
2	18 136
1	b_1 0
0	136

$b_1 = -\frac{1}{18}(136 - 92 \cdot 18 = 84.4 > 0$, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

2. Εξετάστε την ευστάθεια των παρακάτω πολυωνύμων εφαρμόζοντας το κριτήριο Routh:

α) $Q_0(s) = s^3 + 18s^2 + 77s + 4$

β) $Q_0(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 200$

γ) $Q_0(s) = 2s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1$

δ) $Q_0(s) = s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$

Λύση

α) $Q_0(s) = s^3 + 18s^2 + 77s + 4$, ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

3	1	77
2	18	4
1	b_1	0
0	4	

$b_1 = -\frac{1}{18}(4 - 77 \cdot 18 = 76.7 > 0$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

β) $Q_0(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 200$, ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

4	1	11	200
3	6	6	0
2	b_1	200	0
1	c_1	0	
0	200		

$b_1 = -\frac{1}{6}(6 - 11 \cdot 6) = 10 > 0$, $\quad c_1 = -\frac{1}{b_1}\left(6 \cdot 200 - 6 \cdot 10\right) = -114 < 0$

Δύο εναλλαγές στα πρόσημα των συντελεστών του πίνακα άρα 2 ασταθείς πόλοι.

γ) $Q_0(s) = 2s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1$, ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|ccc}
5 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 3 & 3 & 1 \\
3 & b_1 = \varepsilon > 0 & b_2 & 0 \\
2 & c_1 & 1 & \\
1 & d_1 & 0 & \\
0 & 1 & &
\end{array}$$

$b_1 = -\dfrac{1}{3}(2\cdot 3 - 2\cdot 3) = 0$, οπότε θεωρούμε $b_1 = \varepsilon > 0$, $b_2 = -\dfrac{1}{3}\left(2\cdot 1 - 2\cdot 3\right) = \dfrac{4}{3} = 1.33$,

$c_1 = -\dfrac{1}{\varepsilon}(3\cdot\dfrac{4}{3} - 3\cdot\varepsilon) \cong -\dfrac{4}{\varepsilon} < 0$ 1η εναλλαγή

$d_1 = -\dfrac{1}{c_1}(\varepsilon\cdot 1 - c_1 b_2) = \dfrac{\varepsilon}{4}(\varepsilon + \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\varepsilon}{4}) > 0$ 2η εναλλαγή

Άρα 2 ασταθείς πόλοι.

δ) $Q_0(s) = s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$

$$\begin{array}{c|ccc}
5 & 1 & 6 & 8 \\
4 & 2 & 42 & 56 \\
3 & b_1 & b_2 & 0 \\
2 & c_1 & 56 & \\
1 & d_1 & 0 & \\
0 & 56 & &
\end{array}$$

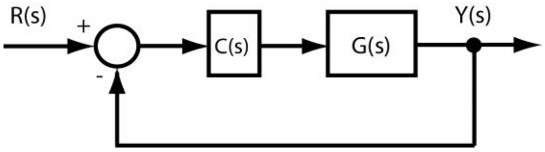
$b_1 = -\dfrac{1}{2}(1\cdot 42 - 2\cdot 6) = -15 < 0$ 1η εναλλαγή

$b_2 = -\dfrac{1}{2}\left(1\cdot 56 - 2\cdot 8\right) = -20$, $c_1 = -\dfrac{1}{b_1}(2\cdot b_2 - 42\cdot b_1) = 39.9 > 0$ 2η εναλλαγή

$d_1 = -\dfrac{1}{c_1}(b_1\cdot 56 - c_1 b_2) = 1.37 > 0$

Άρα 2 ασταθείς πόλοι.

3. Έστω κλειστό σύστημα ελέγχου με $G(s)=\dfrac{K(s+2)}{s^2-1}$ και $C(s)=\dfrac{s+a}{s}$.



Εφαρμόστε το κριτήριο Routh και σχεδιάστε στο επίπεδο (a,K) το πεδίο ευστάθειας του συστήματος, δηλαδή βρείτε γραφικά τα όρια των παραμέτρων (a,K) ώστε το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές .

Λύση

$$C(s)G(s)=\frac{s+a}{s}\cdot\frac{K(s+2)}{s^2-1}=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s)=Q(s)+P(s)=s(s^2-1)+K(s+a)(s+2)=s^3+Ks^2+\left(K(2+a)-1\right)s+2aK$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K(2+a)-1 \\ 2 & K & 2aK \\ 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 2aK & \end{array}$$

$$b_1=-\frac{1}{K}(2aK-K^2(2+a)+K)$$

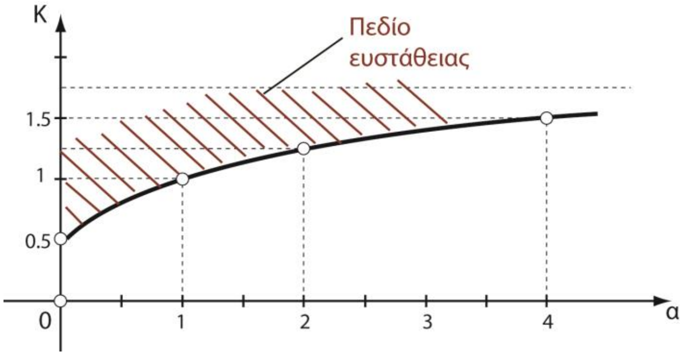
Πρέπει $K>0$, $2aK>0$ άρα $a>0$, και $b_1>0$

ή $-K^2(2+a)+K(2a+1)<0$

ή $K(-K(2+a)+2a+1)<0$ ή $-K(2+a)+2a+1<0$

Ενδεικτικές τιμές για την εξίσωση $K=\dfrac{2a+1}{2+a}$ και πεδίο ευστάθειας:

a	K
0	0.5
1	1
2	1.25
4	1.5



Άσκηση 2 – Τόπος ριζών & Σύνθεση με τη μέθοδο του τόπου ριζών (19/4/16)

Δίνεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{s+6}{s^2}$.

α) Σχεδιάστε τον τόπο ριζών του συστήματος. Βρείτε ασύμπτωτες, σημεία διακλάδωσης (θλάσης), σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα αν υπάρχουν, συνθήκη ευστάθειας, καθώς και την τιμή του κέρδους K στα σημεία διακλάδωσης.

β) Βρείτε ελεγκτή Lead με συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = K\dfrac{s+z}{s+p}$ ώστε το κλειστό σύστημα ελέγχου να έχει επιθυμητούς πόλους $p_{01,2} = -3 \pm 0.6j$.

β1) Προσδιορίστε την υπερύψωση υ και το χρόνο αποκατάστασης T_s που αντιστοιχούν σε αυτούς τους επιθυμητούς πόλους.

β2) Επιλέξτε κατάλληλα την τιμή της ρίζας/μηδενιστή του ελεγκτή ώστε να υπάρχει αποδεκτή λύση για το δεδομένο πρόβλημα. Προσδιορίστε τον τρίτο πόλο του συστήματος.

β3) Σχεδιάστε τον τόπο ριζών του νέου συστήματος. Βρείτε ασύμπτωτες, σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα αν υπάρχουν, σημεία διακλάδωσης (θλάσης), συνθήκη ευστάθειας, καθώς και την τιμή του κέρδους K στα σημεία διακλάδωσης.

Λύση

α) Γενικά το σύστημα έχει $n = 2$ πόλους: $p_{1,2} = 0$ και $m = 1$ ρίζα: $z_1 = -6$

Έχουμε $n - m = 1$, μία **ασύμπτωτος:** $s_{\alpha\sigma.} = \dfrac{p_1 + p_2 - z_1}{n-m} = \dfrac{0+6}{1} = 6$ και $\phi_{\alpha\sigma.} = 180^o$

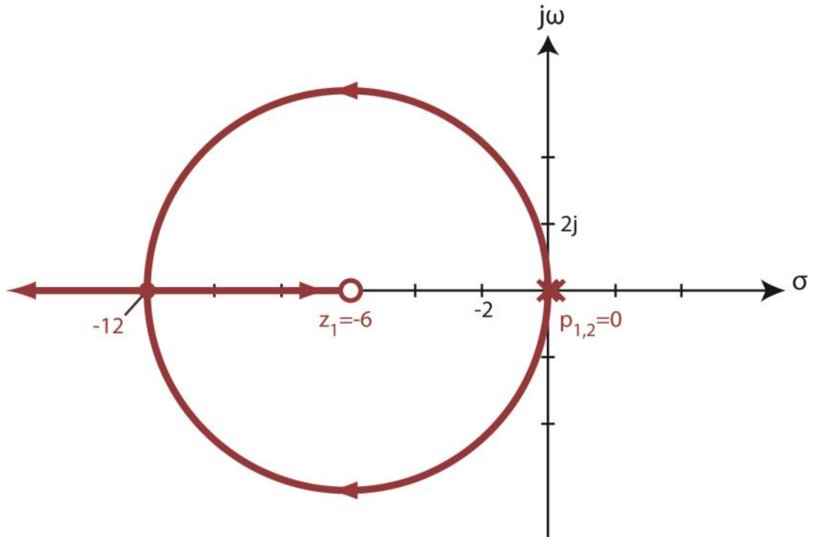
Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds} = 0$, δηλαδή $s^2 - 2s(s+6) = 0$ ή $s(s+12) = 0$

με λύσεις: $s_1 = 0$ (αποδεκτό),

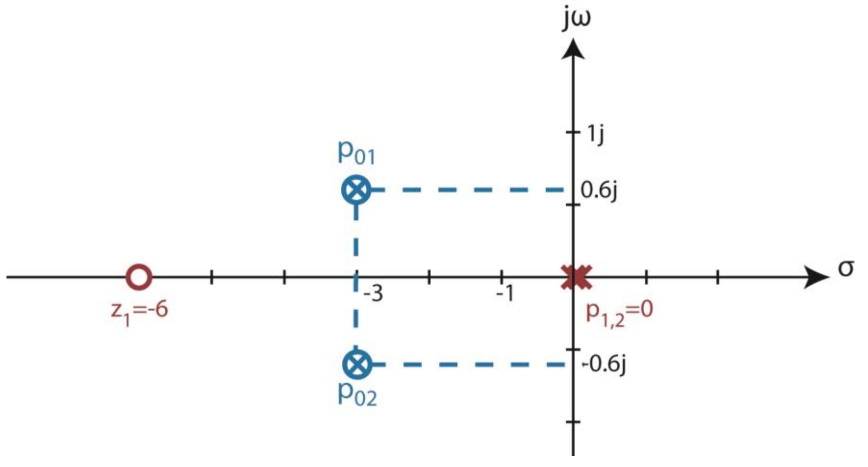
$s_2 = -12$ (αποδεκτό).

Σημεία τομής με το φανταστικό άξονα δεν υπάρχουν.

Το σύστημα είναι ευσταθές για όλες τις τιμές του K.



β) Επιθυμητοί πόλοι: $p_{01,2} = -3 \pm 0.6j$



β1) Υπερύψωση υ & χρόνος αποκατάστασης T_s

Ισχύει $p_{01,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -3 \pm 0.6j$ (1) & $\zeta = \dfrac{|\ln\upsilon|}{\sqrt{\ln^2\upsilon + \pi^2}}$, $\omega_n = \dfrac{4}{\zeta T_s}$ (2)

Από (1) $\quad \zeta\omega_n = 3 \rightarrow \omega_n = \dfrac{3}{\zeta}$

και $\quad \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 0.6 \rightarrow \dfrac{3}{\zeta}\sqrt{1-\zeta^2} = 0.6 \rightarrow -9\zeta^2 - 0.36\zeta + 9 = 0$

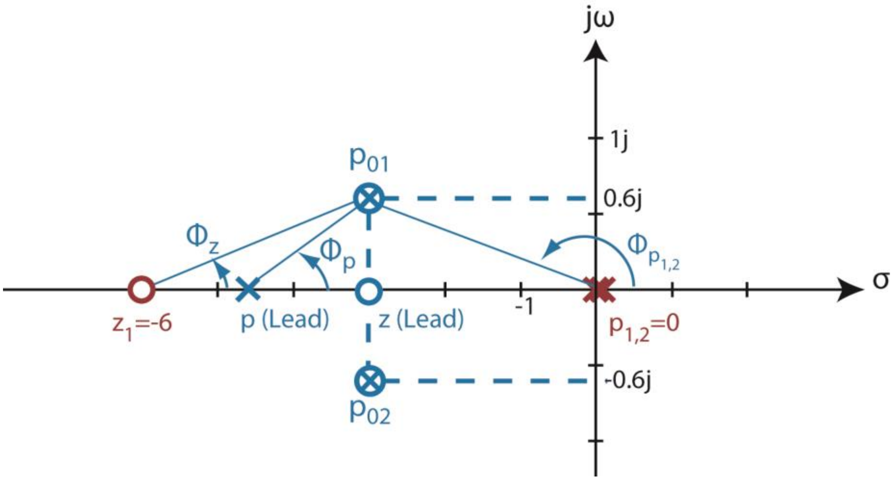
λύσεις $\quad \zeta_1 = 0.98$ (αποδεκτό), $\zeta_2 = -1.02$ (απορρίπτεται) και $\omega_n = 3.06$

Από (2) $\quad 0.98^2 = \dfrac{\ln^2\upsilon}{\ln^2\upsilon + 3.14^2}$, $\qquad 3.06 = \dfrac{4}{0.98T_s} \rightarrow T_s = 1.33$

και $\quad \ln\upsilon = 15.38 \rightarrow \upsilon = e^{-15.38} \cong 0$ (εφόσον $\zeta \cong 1$)

β2) Ελεγκτής Lead με συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = K\dfrac{s+z}{s+p}$

Επιλέγουμε αρχικά μηδενιστή/ρίζα $z = 3$ με $\Phi_z = 90^o$.



Υπολογισμός του πόλου p με το κριτήριο γωνιών:

$$\Phi_{p_1} + \Phi_{p_2} + \Phi_p - \Phi_{z_1} - \Phi_z = 180^o \quad (1)$$

είναι $\Phi_{p_1} = \Phi_{p_2} = 180^o - \tan^{-1}\dfrac{0.6}{3} = 168.7^o$, $\Phi_{z_1} = \tan^{-1}\dfrac{0.6}{3} = 11.3^o$

άρα $\Phi_p = 180^o + 90^o + 11.3^o - 2\cdot 168.7^o = -56.1^o$ (αδύνατο)

Διερεύνηση γωνίας Φ_z ώστε ο πόλος p του ελεγκτή να είναι ευσταθής:

Αν οριακά $p = 0$ η γωνία $\Phi_p = 180^o - \tan^{-1}\dfrac{0.6}{3} = 168.7^o$

άρα $0^o < \Phi_p < 168.7^o$ (2)

από (1) $\Phi_p - \Phi_z = 180^o - \Phi_{p_1} - \Phi_{p_2} + \Phi_{z_1} = 180^o - 2\cdot 168.7^o + 11.3^o = -146.1^o$

ή $\Phi_p + 146.1^o = \Phi_z$

από (2) $146.1^o < \Phi_p + 146.1^o < 180^o$ ή $146.1^o < \Phi_z$

Επιλέγουμε $z = 1$ με $\Phi_z = 180^o - \tan^{-1}\dfrac{0.6}{2} = 163^o > 146.1^o$.

άρα $\Phi_p = 163^o - 146.1^o \cong 17^o$ &

$$\tan\Phi_p = \tan 17^o = 0.303 = \frac{0.6}{p-3} \rightarrow p = 4.98$$

Υπολογισμός του K με το κριτήριο μέτρων:

$$K = \frac{\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 \cdot \Delta p}{\Delta z_1 \cdot \Delta z} = \frac{3.06^2 \cdot 2.09}{3.06 \cdot 2.09} = 3.06$$

Εφόσον $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \sqrt{3^2 + 0.6^2} = 3.06$, $\Delta z_1 = \sqrt{3^2 + 0.6^2} = 3.06$,

$\Delta z = \sqrt{2^2 + 0.6^2} = 2.09$, $\Delta p = \sqrt{2^2 + 0.6^2} = 2.09$

άρα $C(s) = K\dfrac{s+z}{s+p} = 3.06\dfrac{s+1}{s+4.98}$ (ελεγκτής Lead)

Τρίτος πόλος συστήματος από χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$Q(s) = s^2(s+4.98) + 3.06(s+1)(s+6)$$

$$Q(s) = s^3 + 8.04s^2 + 21.42s + 8.36$$

με λύσεις $p_{01,02} = -3.11 \pm 0.66j \cong -3 \pm 0.6j$, $p_{03} = -1.8$ (ευσταθής)

β3) Το νέο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G'(s) = C(s)G(s) = \dfrac{(s+1)(s+6)}{s^2(s+4.98)}$ έχει

$n = 3$ πόλους: $p_{1,2} = 0$ και $p = -4.98$

και $m = 2$ ρίζες: $z = -1$ και $z_1 = -6$

Έχουμε $n - m = 1$, μία **ασύμπτωτος** με $\phi_{\alpha\sigma.} = 180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG'(s)}{ds} = 0$

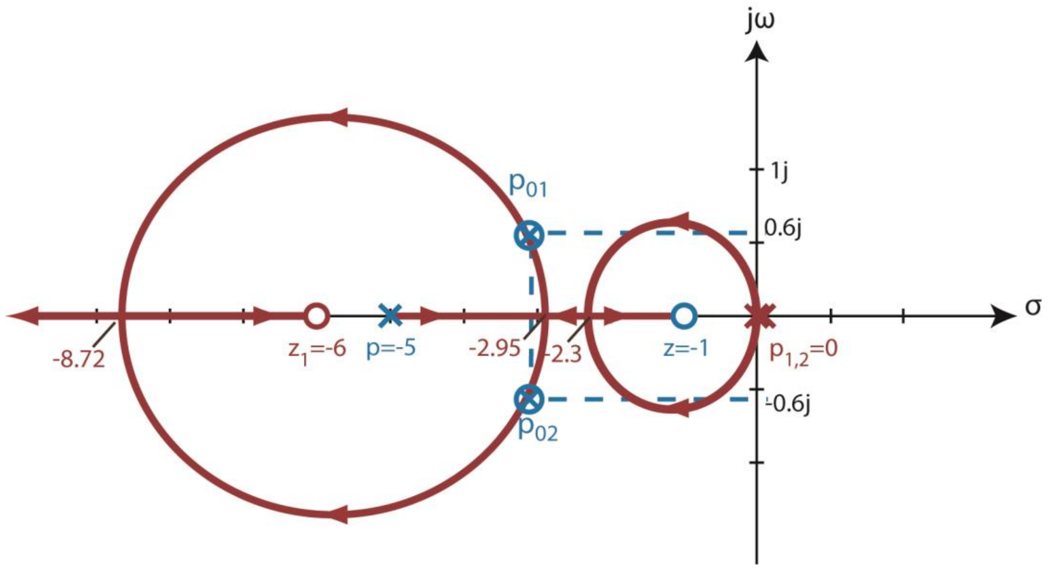
$(2s+7)(s^3+5s) - (s^2+7s+6)(3s^2+9.96s) = 0$ ή $s^3 + 14s^2 + 52.86s + 59.76 = 0$

με λύσεις: $s_1 = -8.72$,

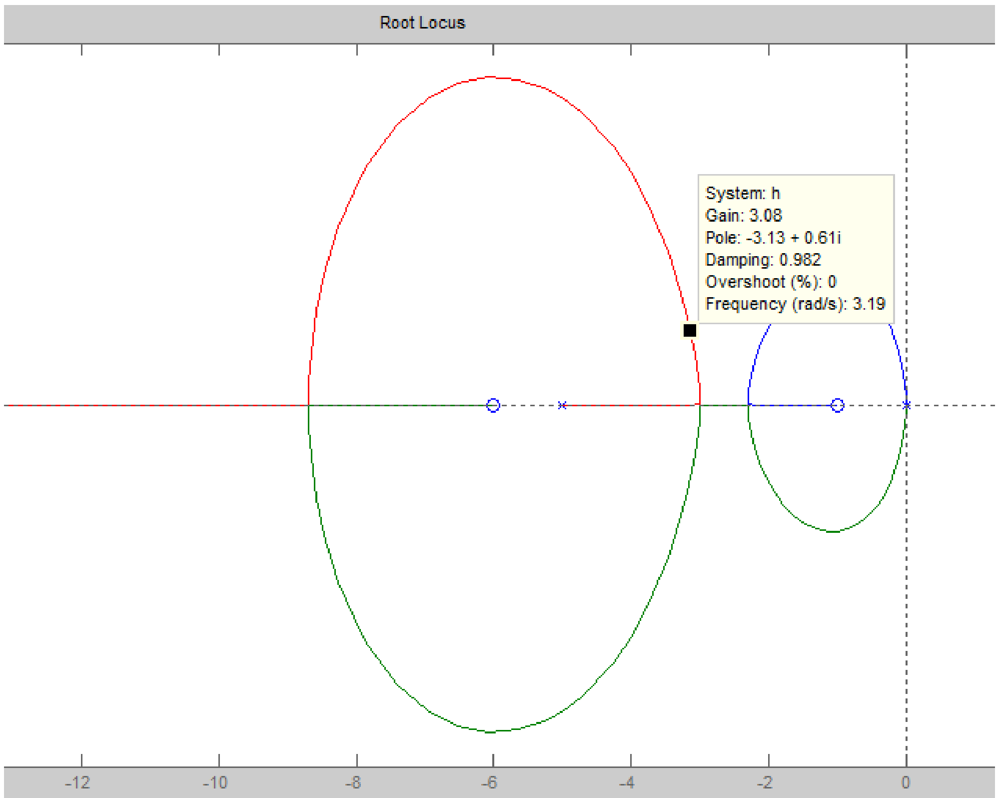
$s_2 = -2.95$,

$s_3 = -2.31$ (αποδεκτά).

Σημεία τομής με το φανταστικό άξονα δεν υπάρχουν.



Επαλήθευση από MatLab



Το νέο σύστημα έχει πόλους $p_{01,2} = -3 \pm 0.6j$ όταν $K = 3.06$.

Άσκηση 3 – Αναλυτική σύνθεση – Αρμονικά διαγράμματα Nyquist (10/5/16)

1. Δίνεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{s+6}{s^2}$.

Επιλέξτε ελεγκτή Lead με συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = K\frac{s+1}{s+p}$ ώστε το κλειστό σύστημα ελέγχου να έχει επιθυμητούς πόλους: $p_{01,2} = -3 \pm 0.6j$

Υπολογίστε τους συντελεστές K, p του ελεγκτή καθώς και τον τρίτο πόλο του κλειστού συστήματος με την αναλυτική μέθοδο (σύγκριση χαρακτηριστικών πολυωνύμων).

Λύση

Ελεγκτής Lead: $C(s) = K\frac{s+1}{s+p}$

Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου: $C(s)G(s) = K\frac{(s+1)(s+6)}{s^2(s+5)}$

Πραγματικό χαρακτηριστικό:

$$Q_0(s) = s^2(s+5) + K(s+1)(s+6) = s^3 + (K+p)s^2 + 7Ks + 6K$$

Επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο με επιθυμητούς πόλους $p_{01,2} = -3 \pm 0.6j$ και διορθωτικό πολυώνυμο $(s+a)$:

$$Q_0(s) = \left((s+3)^2 + 0.6^2\right)(s+a) = (s^2+6s+9.36)(s+a) = s^3 + (6+a)s^2 + (9.36+6a)s + 9.36a$$

Πρέπει $Q_0(s) \overset{!}{=} Q_0^{'}(s)$

άρα $K + p = 6 + a$ (1)

$7K = 9.36 + a$ (2)

$6K = 9.36a \rightarrow K = 1.56a$ (3)

από (2) $7 \cdot 1.56a = 9.36 + a \rightarrow a = 1.9$

από (3) $K = 1.56a \rightarrow K = 2.96$

από (1) $2.96 + p = 6 + 1.9 \rightarrow p = 4.94$

Οπότε ο ελεγκτής, όπως και με τη μέθοδο του τόπου ριζών (άσκηση 2) είναι:

$$C(s) = K\frac{s+1}{s+p} \cong 3\frac{s+1}{s+5}$$

και $s + a = s + 1.9 = 0$, άρα ο τρίτος πόλος $p_{03} = -1.9$ ευσταθής

2. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Nyquist των συστημάτων με συνάρτηση μεταφοράς:

α) $G(s)=\dfrac{s+1}{s+5}$, β) $G(s)=\dfrac{3(s+1)}{s+5}$, γ) $G(s)=\dfrac{s+6}{s^2}$. Υπολογίστε κατά περίπτωση ασύμπτωτες, σημεία τομής με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα κλπ.

Λύση

α) $G(s)=\dfrac{s+1}{s+5}$, με $n=1$, $m=1$ και τύπος $a=0$

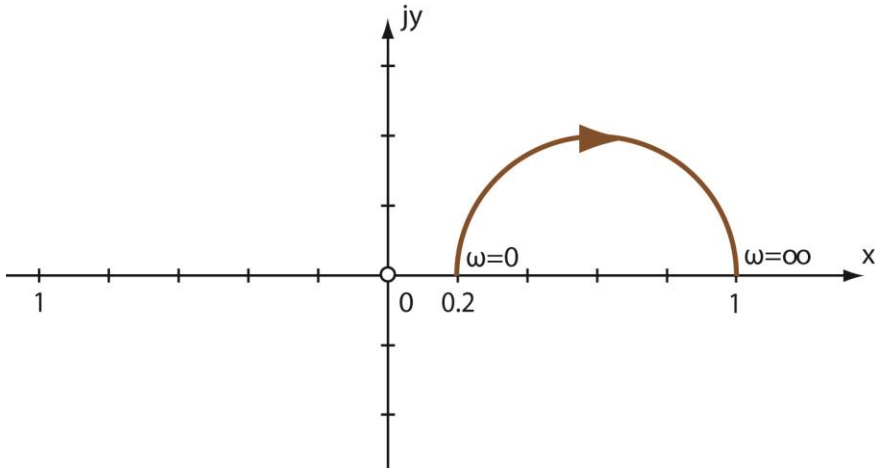
έχουμε $\qquad \Phi_{(0)}=-a\dfrac{\pi}{2}=0,\ \Phi_{(\infty)}=-(n-m)\dfrac{\pi}{2}=0$

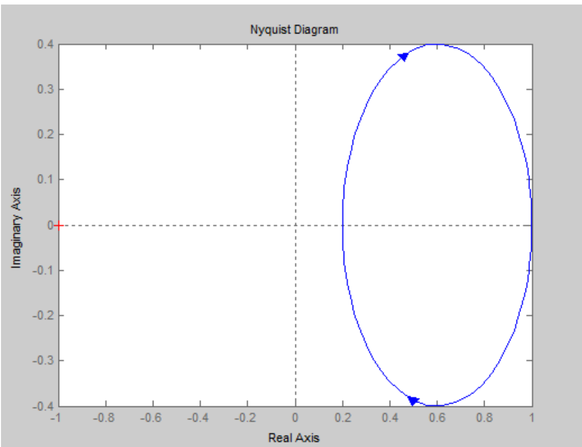
για $s=j\omega$: $\qquad G(j\omega)=\dfrac{(j\omega+1)(-j\omega+5)}{(j\omega+5)(-j\omega+5)}=\dfrac{-j^2\omega^2+5j\omega-j\omega+5}{\omega^2+5^2}$

όπου $\qquad \operatorname{Re}G(j\omega)=\dfrac{\omega^2+5}{\omega^2+5^2}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=\dfrac{4\omega}{\omega^2+5^2}$

για $\omega=0$: $\qquad \operatorname{Re}G(j\omega)=\dfrac{1}{5}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=0_+$

για $\omega\to 0$: $\qquad \operatorname{Re}G(j\omega)\cong 1$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)\cong\dfrac{1}{\omega}\to 0_+$





(MatLab)

β) $G(s)=\dfrac{3(s+1)}{s+5}$, $n=1$, $m=1$ και τύπος $a=0$

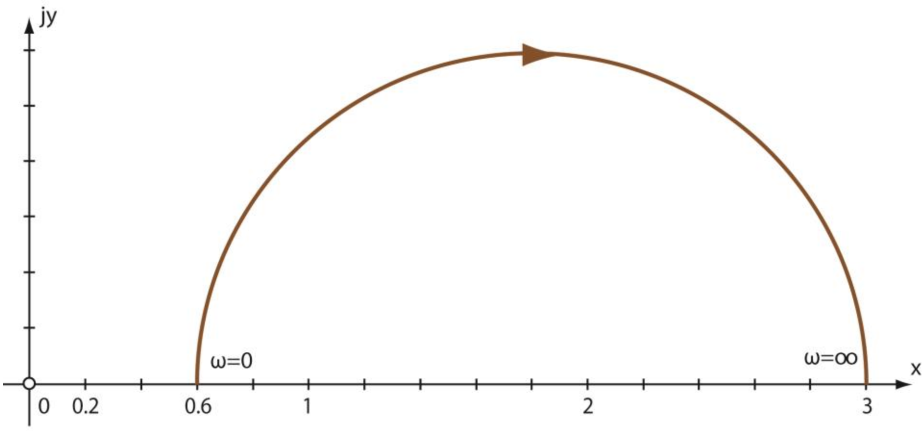
έχουμε $\Phi_{(0)}=-a\dfrac{\pi}{2}=0$, $\Phi_{(\infty)}=-(n-m)\dfrac{\pi}{2}=0$

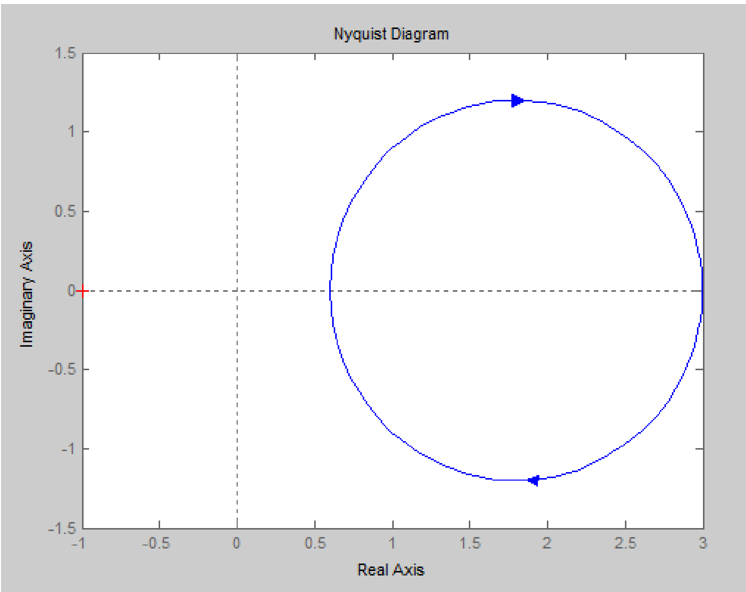
για $s=j\omega$: $G(j\omega)=\dfrac{3(j\omega+1)(-j\omega+5)}{(j\omega+5)(-j\omega+5)}=\dfrac{3(-j^2\omega^2+5j\omega-j\omega+5)}{\omega^2+5^2}$

όπου $\operatorname{Re}G(j\omega)=\dfrac{3(\omega^2+5)}{\omega^2+5^2}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=\dfrac{12\omega}{\omega^2+5^2}$

για $\omega=0$: $\operatorname{Re}G(j\omega)=\dfrac{3}{5}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=0_+$

για $\omega\to 0$: $\operatorname{Re}G(j\omega)\cong 3$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)\cong\dfrac{1}{\omega}\to 0_+$





(MatLab)

γ) $G(s)=\dfrac{s+6}{s^2}$, $n=2$, $m=1$ και τύπος $a=2$

έχουμε $\Phi_{(0)}=-a\dfrac{\pi}{2}=-\pi$, $\Phi_{(\infty)}=-(n-m)\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$

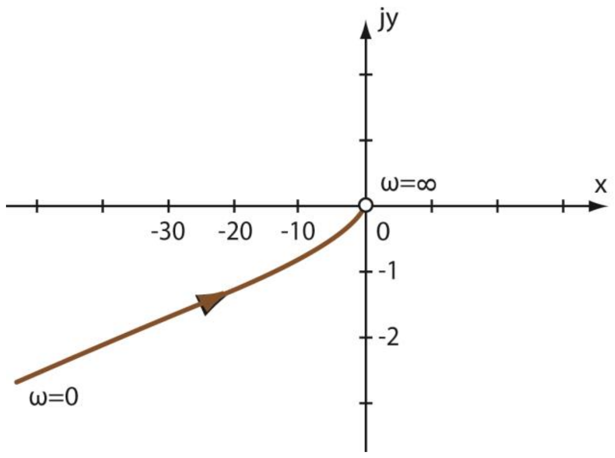
και $\Delta\Phi=[(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2}=[(1-2)-(0-2)]\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

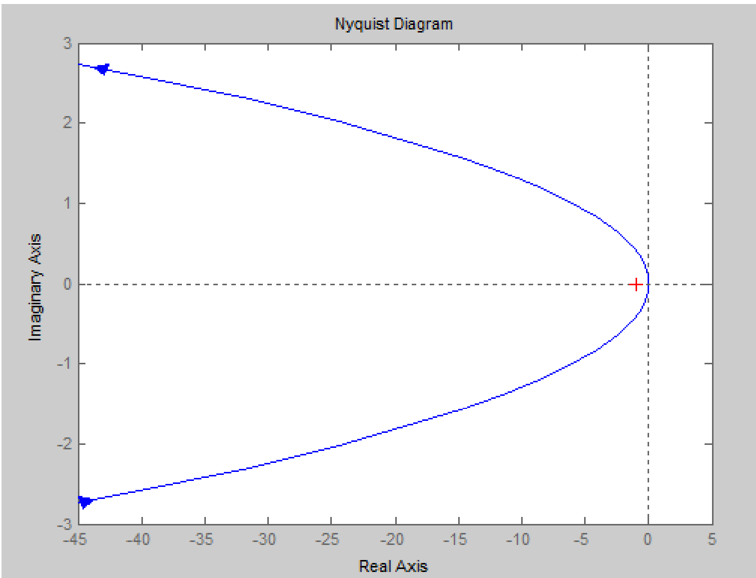
για $s=j\omega$: $G(j\omega)=\dfrac{(j\omega+6)}{(j\omega)^2}=\dfrac{j\omega+6}{-\omega^2}$

όπου $\operatorname{Re}G(j\omega)=\dfrac{-6}{\omega^2}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=\dfrac{-1}{\omega}$

για $\omega=0$: $\operatorname{Re}G(j\omega)=-\infty$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=-\infty$

για $\omega\to 0$: $\operatorname{Re}G(j\omega)=0_-$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=0_-$

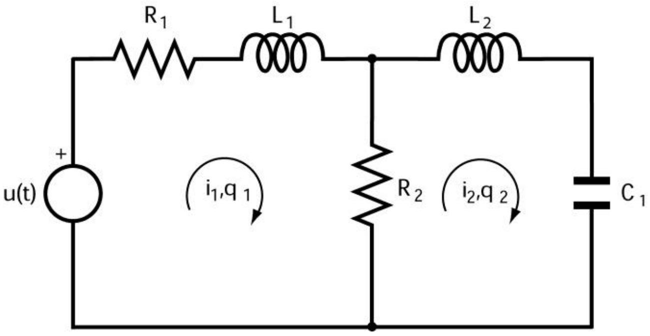




(MatLab)

Άσκηση 4 – Εξισώσεις εσωτερικής κατάστασης & λύση (31/5/16)

1. Δίνεται το παρακάτω ηλεκτρικό σύστημα με εξισώσεις:



$L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) = u(t)$ (βρόχος 1) και $L_2 \ddot{i}_2 - R_2 \dot{i}_1 + R_2 \dot{i}_2 + \frac{1}{C_1} i_2 = 0$ (βρόχος 2)

Θεωρήστε $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 0.5$, μεταβλητές εσωτερικής κατάστασης $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$, $x_3 = \dot{i}_2$, έξοδο $y = i_2$.

Γράψτε τις εξισώσεις του συστήματος στο χώρο κατάστασης και υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του.

Λύση

$L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) = u(t)$ ή $\dot{i}_1 + i_1 + 2(i_1 - i_2) = u(t)$ (1)

$L_2 \ddot{i}_2 - R_2 \dot{i}_1 + R_2 \dot{i}_2 + \frac{1}{C_1} i_2 = 0$ ή $2\ddot{i}_2 - 2\dot{i}_1 + 2\dot{i}_2 + 2i_2 = 0$ (2)

Μεταβλητές εσωτερικής κατάστασης: $x_1 = i_1$ ή $\dot{x}_1 = \dot{i}_1$

$x_2 = i_2$ ή $\dot{x}_2 = \dot{i}_2$

$x_3 = \dot{i}_2$ ή $\dot{x}_3 = \ddot{i}_2$

Εξισώσεις κατάστασης:

από (1) $\dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + u$

$\dot{x}_2 = \dot{i}_2 = x_3$

από (1) και (2) $\dot{x}_3 = \dot{i}_1 - \dot{i}_2 + i_2 = -3x_1 + x_2 - x_3 + u$

και $y = i_2 = x_2$

Σε μορφή πινάκων:

$$\overset{o}{\underline{x}}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}}_{\underline{A}}\cdot\underline{x}(t)+\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\underline{B}}\cdot u(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{C}}\cdot\underline{x}(t)$$

Συνάρτηση μεταφοράς: $G(s)=\underline{C}(s\underline{I}-\underline{A})^{-1}\underline{B}$

$$(s\underline{I}-\underline{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s+3 & -2 & 0\\ 0 & s & -1\\ 3 & -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{ij}\right]^{T}$$

Η ορίζουσα Δ με ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή είναι:

$$\Delta=(s+3)\cdot\left(s(s+1)+1\right)-(-2)\cdot 3=s^3+4s^2+2s+3$$

Ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων Δ_{ij}

$$\left[\Delta_{ij}\right]^{T}=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}s & -1\\ -1 & s+1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & s+1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & s\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & s+1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}s+3 & 0\\ 3 & s+1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}s+3 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 0\\ s & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}s+3 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}s+3 & -2\\ 0 & s\end{vmatrix}\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}s^2+s-1 & 2s+2 & 2\\ -3 & s^2+4s+3 & s+3\\ -3s & s-3 & s^2+3s\end{bmatrix}$$

οπότε

$$G(s)=\underline{C}(s\underline{I}-\underline{A})^{-1}\underline{B}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s^2+s-1 & 2s+2 & 2\\ -3 & s^2+4s+3 & s+3\\ -3s & s-3 & s^2+3s\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-3 & s^2+4s+3 & s+3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow G(s)=\frac{s}{s^3+4s^2+2s+3}$$

2. Έστω ομογενές σύστημα (είσοδος $u(t)=0$) με εξισώσεις κατάστασης:

$\overset{o}{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$. Επιλύστε τις εξισώσεις με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και βρείτε τις χρονικές αποκρίσεις των μεταβλητών $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ με αρχικές συνθήκες $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Λύση

Η ελεύθερη απόκριση (για $u(t)=0$) έχει εξίσωση:

$$\overset{o}{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) \quad \Bigg| \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι: $\underline{X}(s) = \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{x}_0$, όπου $\underline{\Phi}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$

και $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}_0$

$$\underline{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 4 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s^2+5s+4 & s+5 & 1 \\ 0 & s(s+5) & s \\ 0 & -4s & s^2 \end{bmatrix}$$

όπου $\Delta = s\big(s(s+5)+4)\big) = s(s^2+5s+4) = s(s+1)(s+4)$

οπότε
$$\underline{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+5}{s(s+1)(s+4)} & \frac{1}{s(s+1)(s+4)} \\ 0 & \frac{s+5}{(s+1)(s+4)} & \frac{1}{(s+1)(s+4)} \\ 0 & \frac{-4}{(s+1)(s+4)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

Με ανάλυση σε κλάσματα είναι:

$$\Phi_{11} = \frac{1}{s}$$

$$\Phi_{12} = \frac{s+5}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+4},$$

με τη μέθοδο των υπολοίπων:

$$A_1 = \left.\frac{s+5}{(s+1)(s+4)}\right|_{s=0} = \frac{5}{4},\ A_2 = \left.\frac{s+5}{s(s+4)}\right|_{s=-1} = -\frac{4}{3},\ A_3 = \left.\frac{s+5}{s(s+1)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{12}$$

$$\Phi_{13} = \frac{1}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+4}$$

με τη μέθοδο των υπολοίπων:

$$A_1 = \left.\frac{1}{(s+1)(s+4)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4},\ A_2 = \left.\frac{1}{s(s+4)}\right|_{s=-1} = -\frac{1}{3},\ A_3 = \left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{12}$$

$$\Phi_{22} = \frac{s+5}{(s+1)(s+4)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4},$$

με τη μέθοδο των υπολοίπων: $A_1 = \left.\frac{s+5}{s+4}\right|_{s=-1} = \frac{4}{3},\ A_2 = \left.\frac{s+5}{s+1}\right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$

$$\Phi_{23} = \frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4},$$

με τη μέθοδο των υπολοίπων: $A_1 = \left.\frac{1}{s+4}\right|_{s=-1} = \frac{1}{3},\ A_2 = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$

$$\Phi_{32} = \frac{-4}{(s+1)(s+4)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4},$$

με τη μέθοδο των υπολοίπων: $A_1 = \left.\frac{-4}{s+4}\right|_{s=-1} = -\frac{4}{3},\ A_2 = \left.\frac{-4}{s+1}\right|_{s=-4} = \frac{4}{3}$

$$\Phi_{33} = \frac{s}{(s+1)(s+4)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4},$$

με τη μέθοδο των υπολοίπων: $A_1 = \left.\frac{s}{s+4}\right|_{s=-1} = -\frac{1}{3},\ A_2 = \left.\frac{s}{s+1}\right|_{s=-4} = \frac{4}{3}$

άρα $$\underline{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{5/4}{s} + \frac{-4/3}{s+1} + \frac{1/12}{s+4} & \frac{1/4}{s} + \frac{-1/3}{s+1} + \frac{1/12}{s+4} \\ 0 & \frac{4/3}{s+1} + \frac{-1/3}{s+4} & \frac{1/3}{s+1} + \frac{-1/3}{s+4} \\ 0 & \frac{-4/3}{s+1} + \frac{4/3}{s+4} & \frac{-1/3}{s+1} + \frac{4/3}{s+4} \end{bmatrix}$$

και $$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-4t} & \frac{1}{4} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-4t} \\ 0 & \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \\ 0 & -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{5}{4}-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{12}e^{-4t} & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{12}e^{-4t}\\ 0 & \frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}\\ 0 & -\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{4}-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{2}{12}e^{-4t}\\ \frac{5}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\\ -\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{8}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}$$

ή

$$x_1(t)=\frac{10}{4}-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{2}{12}e^{-4t}\Big|\; x_1(0)=1$$

$$x_2(t)=\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\Big|\; x_2(0)=1$$

$$x_3(t)=-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{8}{3}e^{-4t}\Big|\; x_3(0)=1$$