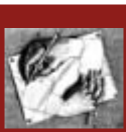
Α.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ Τ.Ε.



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ

Καθηγητής: Δ. ΔΗΜΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ
Καθ. Εφαρμογών: Σ. ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΟΥ

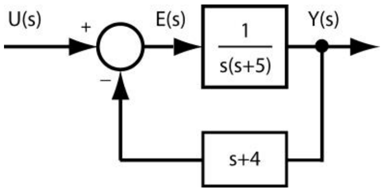
Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ

Ασκήσεις Πράξης

Εαρινό εξάμηνο 2016/17

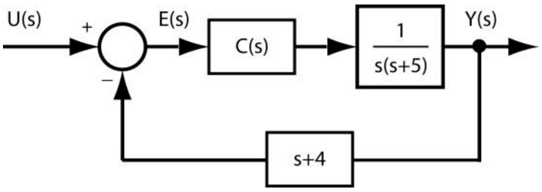
Άσκηση 1 – Μόνιμα σφάλματα & ευστάθεια συστημάτων (21/03/17)

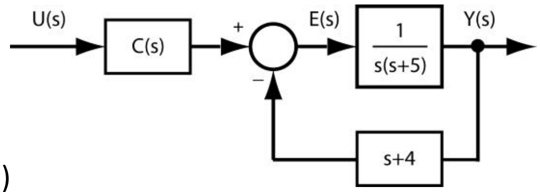
1. Δίνεται το παρακάτω κλειστό σύστημα:



α) Βρείτε το μόνιμο σφάλμα e_∞, μέσω του θεωρήματος τελικής τιμής Laplace, για είσοδο: i) $u(t)=4$, ii) $u(t)=4t$ και iii) $u(t)=4t^2$.

β) Προσδιορίστε, για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, την απλούστερη συνάρτηση μεταφοράς $C(s)$ του ελεγκτή, ώστε το μόνιμο σφάλμα να είναι $e_\infty = 0.1$, για είσοδο $u(t)=4t$ και $u(t)=4t^2$:

i) 

ii) 

Σε όλες τις περιπτώσεις διερευνήστε την καταλληλότητα του ελεγκτή ως προς την ευστάθεια του συστήματος βάσει του κριτηρίου Routh.

Λύση

α) Μόνιμο σφάλμα

i) $u(t)=4$ και $U(s)=\dfrac{4}{s}$:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{U(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{4}{s}}{1+\frac{s+4}{s(s+5)}} = 0$$

ii) $u(t)=4t$ και $U(s)=\dfrac{4}{s^2}$:

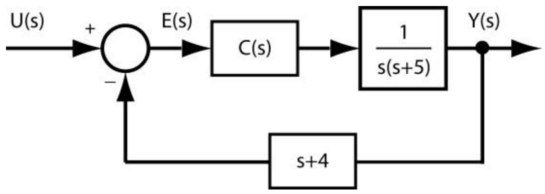
$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{U(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{4}{s^2}}{1+\frac{s+4}{s(s+5)}} = \lim_{s\to 0}\frac{4}{s+\frac{s+4}{s+5}} = 5$$

iii) $u(t)=4t^2$ και $U(s)=\dfrac{8}{s^3}$:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{U(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{8}{s^3}}{1+\frac{s+4}{s(s+5)}} = \lim_{s\to 0}\frac{8}{s^2+s\frac{s+4}{s+5}} = \infty$$

β) Προσδιορισμός ελεγκτή $C(s)$:

i)



Είναι $E(s) = U(s) - H(s)Y(s) = U(s) - C(s)G(s)H(s)E(s) \to E(s) = \dfrac{U(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$

- Για $u(t) = 4t$ και $U(s) = \dfrac{4}{s^2}$ πρέπει $C(s) = K_p$ ώστε $e_\infty = 0.1$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{U(s)}{1+C(s)G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{4}{s^2}}{1+C(s)\frac{s+4}{s(s+5)}} = \lim_{s\to 0}\frac{4}{s+C(s)\frac{s+4}{s+5}} = 0.1$$

Οπότε $$\frac{4}{K_p\frac{4}{5}} = 0.1 \to K_p = 50$$

Διερεύνηση ευστάθειας:

Το κλειστό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)H(s)} = \frac{K_p\frac{1}{s(s+5)}}{1+K_p\frac{s+4}{s(s+5)}} = \frac{K_p}{s^2+(5+K_p)s+4K_p}$$

και χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $Q_0(s) = s^2 + (5+K_p)s + 4K_p$ ή

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 4K_p \\ 1 & 5+K_p & \\ 0 & 4K_p & \end{array}$$

οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $\forall K_p$

- Για $u(t) = 4t^2$ και $U(s) = \dfrac{8}{s^3}$ πρέπει $C(s) = \dfrac{K_I}{s}$ ώστε $e_\infty = 0.1$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{U(s)}{1+C(s)G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{8}{s^3}}{1+C(s)\frac{s+4}{s(s+5)}} = \lim_{s\to 0}\frac{8}{s^2+sC(s)\frac{s+4}{s+5}} = 0.1$$

Οπότε $\qquad \dfrac{8}{K_I\frac{4}{5}} = 0.1 \to K_I = 100$

Διερεύνηση ευστάθειας:

Το κλειστό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)H(s)} = \frac{\frac{K_I}{s}\frac{1}{s(s+5)}}{1+\frac{K_I}{s}\cdot\frac{s+4}{s(s+5)}} = \frac{K_I}{s^2(s+5)+K_I(s+4)}$$

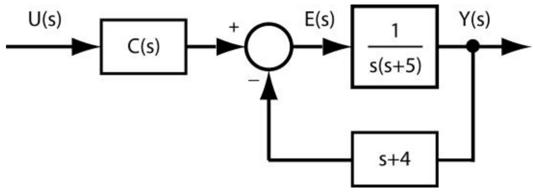
και χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $Q_0(s) = s^3+5s^2+K_Is+4K_I$ ή

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K_I \\ 2 & 5 & 4K_I \\ 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 4K_I & \end{array} \qquad b_1 = -\frac{1}{5}(4K_I - 5K_I) = K_I\,.$$

Οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $\forall K_I$.

ii)



Είναι $E(s) = C(s)U(s) - H(s)Y(s) = C(s)U(s) - G(s)H(s)E(s) \to E(s) = \dfrac{C(s)U(s)}{1+G(s)H(s)}$

- Για $u(t) = 4t$ και $U(s) = \dfrac{4}{s^2}$ πρέπει $C(s) = K_p$ ώστε $e_\infty = 0.1$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{C(s)U(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot C(s)\cdot\frac{4}{s^2}}{1+\frac{s+4}{s(s+5)}} = \lim_{s\to 0}\frac{4C(s)}{s+\frac{s+4}{s+5}} = 0.1$$

Οπότε $\dfrac{4K_p}{\frac{4}{5}} = 0.1 \rightarrow K_p = 0.02$

- Για $u(t) = 4t^2$ και $U(s) = \dfrac{8}{s^3}$ πρέπει $C(s) = K_d s$ ώστε $e_\infty = 0.1$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{C(s)U(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot C(s)\cdot \frac{8}{s^3}}{1+\frac{s+4}{s(s+5)}} = \lim_{s\to 0}\frac{8K_d}{s+\frac{s+4}{s+5}} = 0.1$$

Οπότε $\dfrac{8K_d}{\frac{4}{5}} = 0.1 \rightarrow K_d = 0.01$

Διερεύνηση ευστάθειας:

Το κλειστό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s)\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = C(s)\frac{\frac{1}{s(s+5)}}{1+\frac{s+4}{s(s+5)}} = \frac{C(s)}{s^2+6s+4}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q_0(s) = s^2 + 6s + 4$, ευσταθές

Άρα για $C(s) = K_p$ ή $C(s) = K_d s$ το κλειστό σύστημα ευσταθές $\forall K_p, K_d$.

2. Έστω ανοιχτό σύστημα με πόλους: $p_{1,2,3} = -4$ και $p_4 = 0$. Βρείτε με το κριτήριο Routh ελεγκτή αναλογίας $C(s) = K_p$ ώστε το κλειστό σύστημα ελέγχου να είναι ευσταθές. Τι θα αλλάξει με την προσθήκη μιας ρίζας/μηδενιστή $z_1 = -4$.

Λύση

Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού συστήματος με $p_{1,2,3} = -4$ και $p_4 = 0$:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)^3} = \frac{1}{s^4+12s^3+48s^2+64s}$$

Συνάρτηση μεταφοράς κλειστού συστήματος:

$$G_0(s) = \frac{K_p G(s)}{1+K_p G(s)} = \frac{K_p}{s^4+12s^3+48s^2+64s+K_p}$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 48 & K_p \\ 3 & 12 & 64 & 0 \\ 2 & b_1>0 & K_p & 0 \\ 1 & c_1>0 & 0 & \\ 0 & K_p>0 & & \end{array}$$

$b_1 = -\dfrac{1}{12}(64 - 48 \cdot 12) = 42.6 > 0$,

$c_1 = -\dfrac{1}{b_1}\left(12 \cdot K_p - 64 \cdot b_1\right) > 0 \to -12K_p + 2730.6 > 0 \to K_p < 227.5$

Συνθήκη ευστάθειας: $0 < K_p < 227.5$

Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού συστήματος με $p_{1,2,3} = -4$, $p_4 = 0$ και $z_1 = -4$:

$$G(s) = \frac{s+4}{s(s+4)^3} = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 16s}$$

Συνάρτηση μεταφοράς κλειστού συστήματος:

$$G_0(s) = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{K_p}{s^3 + 8s^2 + 16s + K_p}$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16 \\ 2 & 8 & K_p \\ 1 & b_1>0 & 0 \\ 0 & K_p>0 & \end{array}$$

$b_1 = -\dfrac{1}{8}(K_p - 16 \cdot 8) > 0 \to K_p < 128$. Συνθήκη ευστάθειας: $0 < K_p < 128$

3. Εξετάστε την ευστάθεια των παρακάτω πολυωνύμων εφαρμόζοντας το κριτήριο Routh. Όπου απαιτείται προσδιορίστε τον αριθμό των ασταθών πόλων και τη συνθήκη ευστάθειας.

α) $Q_0(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 2s + 12$, **β)** $Q_0(s) = s^5 + s^4 + 12s^2 + 77s + 8$

γ) $Q_0(s) = s^5 + s^4 + Ks^3 + 12s^2 + 77s + 8$, **δ)** $Q_0(s) = s^4 + 3s^3 + s^2 + as + K$.

Σχεδιάστε στο επίπεδο (a, K) το πεδίο ευστάθειας του συστήματος.

Λύση

α) $Q_0(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 2s + 12$, ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|ccc}
5 & 1 & 6 & 2 \\
4 & 1 & 6 & 12 \\
3 & b_1 = \varepsilon > 0 & b_2 & 0 \\
2 & c_1 & 12 & \\
1 & d_1 & 0 & \\
0 & 12 & &
\end{array}$$

$b_1 = -\frac{1}{1}(1\cdot 6 - 1\cdot 6) = 0$, οπότε θεωρούμε $b_1 = \varepsilon > 0$, $b_2 = -\frac{1}{1}(1\cdot 12 - 2\cdot 1) = -10$,

$$c_1 = -\frac{1}{\varepsilon}(1\cdot(-10) - 6\cdot\varepsilon) = \frac{10+6\varepsilon}{\varepsilon} > 0$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1}(\varepsilon\cdot 12 - c_1 b_2) = -\frac{\varepsilon}{10+6\varepsilon}(12\varepsilon + 10\cdot\frac{10+6\varepsilon}{\varepsilon}) = \frac{-12\varepsilon^2 - 60\varepsilon - 10}{10+6\varepsilon} < 0$$

Δύο εναλλαγές στα πρόσημα των συντελεστών του πίνακα: από $c_1 > 0 \to d_1 < 0$ και από $d_1 < 0 \to 12 > 0$, άρα 2 ασταθείς πόλοι.

β) $Q_0(s) = s^5 + s^4 + 12s^2 + 77s + 8$, ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|ccc}
5 & 1 & 0 & 77 \\
4 & 1 & 12 & 8 \\
3 & b_1 & b_2 & 0 \\
2 & c_1 & 8 & \\
1 & d_1 & 0 & \\
0 & 8 > 0 & &
\end{array}$$

$b_1 = -\frac{1}{1}(12 - 0) = -12 < 0$ 1η εναλλαγή

$$b_2 = -\frac{1}{1}(1\cdot 8 - 77\cdot 1) = 69$$

$c_1 = -\frac{1}{b_1}(1\cdot b_2 - 12\cdot b_1) = \frac{1}{12}(69 + 144) = 17.75 > 0$ 2η εναλλαγή

$$d_1 = -\frac{1}{c_1}(8\cdot b_1 - c_1 b_2) = -\frac{1}{17.75}(-96 - 1224.75) = 74.4 > 0$$

Δύο εναλλαγές στα πρόσημα των συντελεστών του πίνακα άρα 2 ασταθείς πόλοι.

γ) $Q_0(s) = s^5 + s^4 + Ks^3 + 12s^2 + 77s + 8$, ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

5	1	K	77
4	1	12	8
3	b_1	b_2	0
2	c_1	8	
1	d_1	0	
0	8		

$b_1 = -\frac{1}{1}(12 - K) = K - 12 > 0 \rightarrow K > 12$, $b_2 = -\frac{1}{1}(1 \cdot 8 - 77 \cdot 1) = 69$,

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}(1 \cdot b_2 - 12 \cdot b_1) = -\frac{1}{K-12}(69 - 12 \cdot (K - 12)) = \frac{12K - 213}{K - 12}$$

Πρέπει $c_1 > 0$ άρα: $12K - 213 > 0 \rightarrow K > 17.75$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1}(8 \cdot b_1 - c_1 b_2) = -\frac{8 \cdot (K-12)^2}{12K - 213} + 69$$

Πρέπει $d_1 > 0$ άρα: $-8(K-12)^2 + 69(12K - 213) > 0 \rightarrow K^2 - 127.5K + 1981.125 > 0$

δηλαδή $18.11 < K < 109.4$

δ) $Q_0(s) = s^4 + 3s^3 + s^2 + as + K$

4	1	1	K
3	3	a	0
2	b_1	K	0
1	c_1	0	
0	$K > 0$		

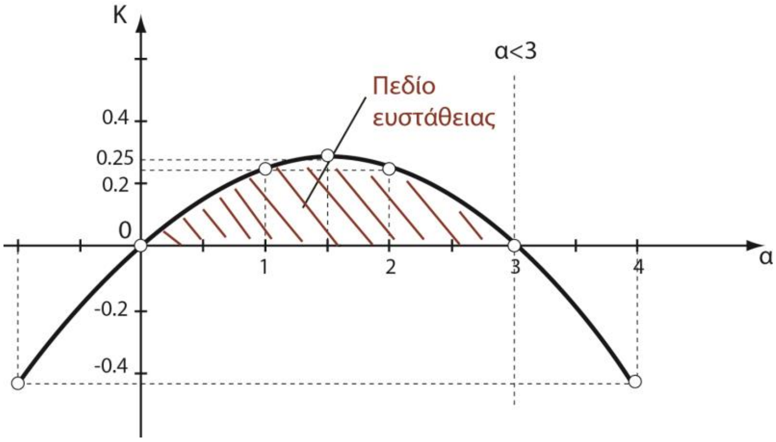
$b_1 = -\frac{1}{3}(a - 3) > 0 \rightarrow a < 3$,

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}(3 \cdot K - a \cdot b_1) = -\frac{3}{3-a}\left(3K - a\frac{3-a}{3}\right) = \frac{-a^2 + 3a - 9K}{3 - a}$$

Πρέπει $c_1 > 0$ άρα: $-a^2 + 3a - 9K > 0 \rightarrow K < \frac{-a^2 + 3a}{9}$

Ενδεικτικές τιμές για την εξίσωση $K = \frac{3a - a^2}{9}$ και πεδίο ευστάθειας:

a	K
-1	-0.44
0	0
1	0.22
1.5	0.25
2	0.22
3	0
4	-0.44



Άσκηση 2 – Τόπος ριζών (5/4/17)

Σχεδιάστε τον τόπο ριζών των συστημάτων με συνάρτηση μεταφοράς:

α) $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+4)}$, **β)** $G(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s^2(s+3)}$, **γ)** $G(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s^3}$,

δ) $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s(s^2+2s+2)}$, **ε)** $G(s)=\dfrac{(s^2-4)}{s^3}$

Βρείτε ασύμπτωτες, σημεία διακλάδωσης/θλάσης όπου υπάρχουν, σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα αν υπάρχουν, γωνία εξόδου από πόλους και συνθήκη ευστάθειας. Στα σημεία διακλάδωσης, όπου υπάρχουν, προσδιορίστε την τιμή του κέρδους K.

Λύση

α) $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+4)}=\dfrac{s^2+4s+4}{s^3+4s^2}$

Το σύστημα έχει $n=3$ πόλους: $p_{1,2}=0$, $p_3=-4$ και $m=2$ ρίζες: $z_{1,2}=-4$,

$n-m=1$, άρα μία **ασύμπτωτος:** $s_{\alpha\sigma.}=\dfrac{p_1+p_2+p_3-z_1-z_2}{n-m}=4$ και $\phi_{\alpha\sigma.}=180^o$

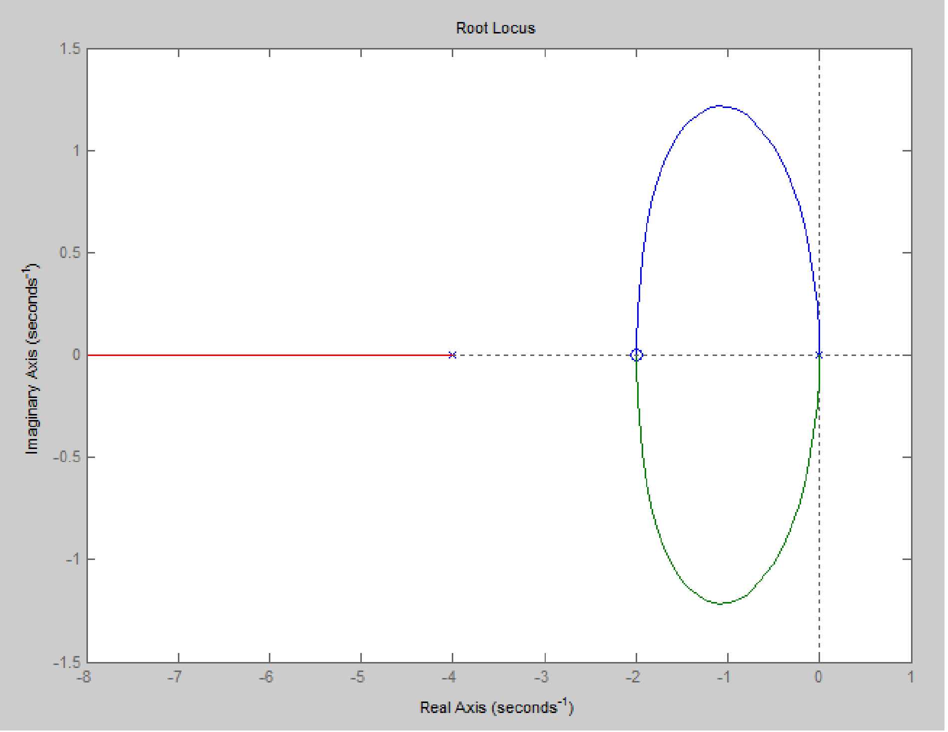
Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$, δηλαδή

$$(2s+4)(s^3+4s^2)-(s+2)^2(3s^2+8s)=s(s+2)(-s^2-6s-16)=0$$

με λύσεις: $s_1=0$ (αποδεκτό), $s_2=-2$ (αποδεκτό),

$s_{3,4}=-3\pm 2.64j$ (απορρίπτονται)

Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές για όλες τις τιμές του K.



β) $G(s) = \dfrac{(s+2)(s+4)}{s^2(s+3)} = \dfrac{s^2+6s+8}{s^3+3s^2} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Το σύστημα έχει $n=3$ πόλους: $p_{1,2}=0$, $p_3=-3$ και $m=2$ ρίζες: $z_1=-2$, $z_2=-4$

$n-m=1$, άρα μία **ασύμπτωτος** με $\phi_{\alpha\sigma.}=180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$, δηλαδή

$$(2s+6)(s^3+3s^2)-(s^2+6s+8)(3s^2+6s)=s(-s^3-12s^2-42s-48)=0$$

με λύσεις: $s_1=0$ (αποδεκτό),

$s_2=-6.95$ (αποδεκτό),

$s_{3,4}=-2.5\pm 0.73j$ (απορρίπτονται)

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$Q_0(s)=Q(s)+KP(s)=s^3+3s^2+Ks^2+6Ks+8K=s^3+(3+K)s+6Ks+8K=0$$

Στο σημείο διακλάδωσης:

$$Q_0(s)=(s+6.95)^2(s+p_3)=s^3+(p_3+13.9)s^2+(13.9p_3+48.3)s+48.3p_3=0$$

Οπότε

$3+K=p_3+13.9$

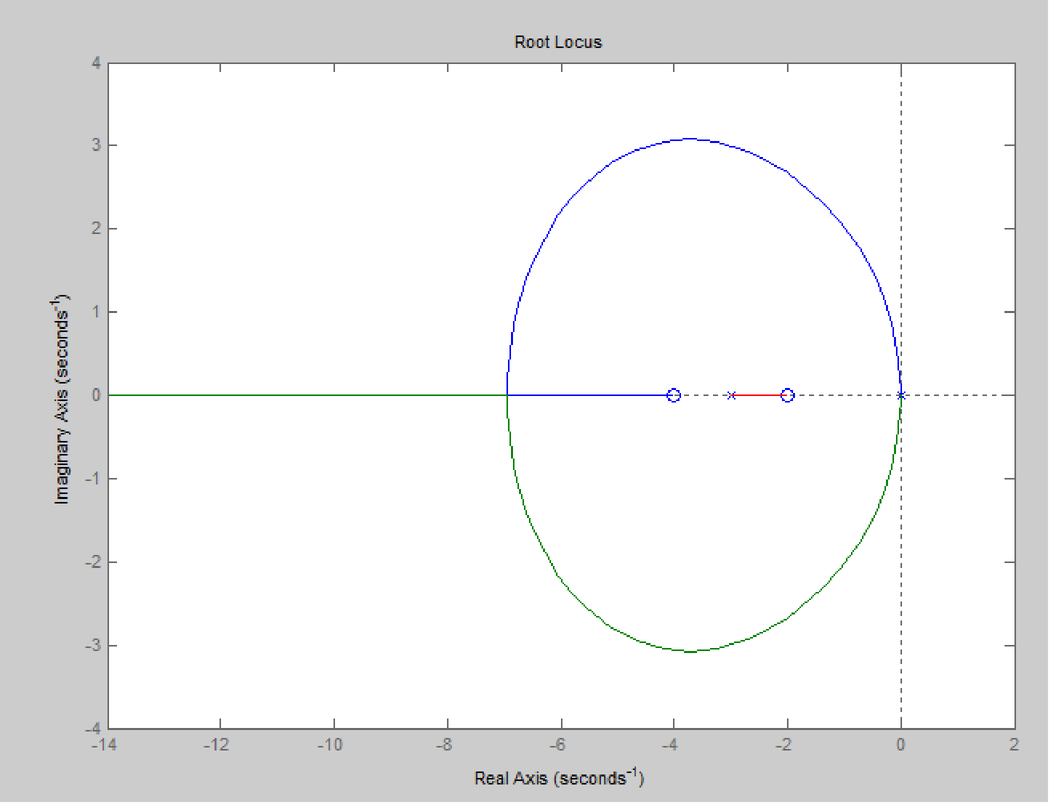
$6K=13.9p_3+48.3$

$8K=48.3p_3$

$p_3=2.16$

(τρίτος πόλος -2.16 στο κόκκινο τμήμα)

$K=13.7$



γ) $G(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s^3}=\dfrac{s^2+6s+8}{s^3}=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Το σύστημα έχει $n=3$ πόλους: $p_{1,2,3}=0$, και $m=2$ ρίζες: $z_1=-2$, $z_2=-4$

$n-m=1$, άρα μία **ασύμπτωτος** με $\phi_{\alpha\sigma.}=180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$, δηλαδή

$(2s+6)s^3-(s^2+6s+8)3s^2=s^2(-s^2-12s-24)=0$

με λύσεις: $s_{1,2}=0$ (αποδεκτά), $s_3=-2.53$ (απορρίπτεται),

$s_4=-9.46$ (αποδεκτό)

Σημεία τομής με το φανταστικό άξονα:

$Q_0(s)=Q(s)+KP(s)=s^3+Ks^2+6Ks+8K=0$

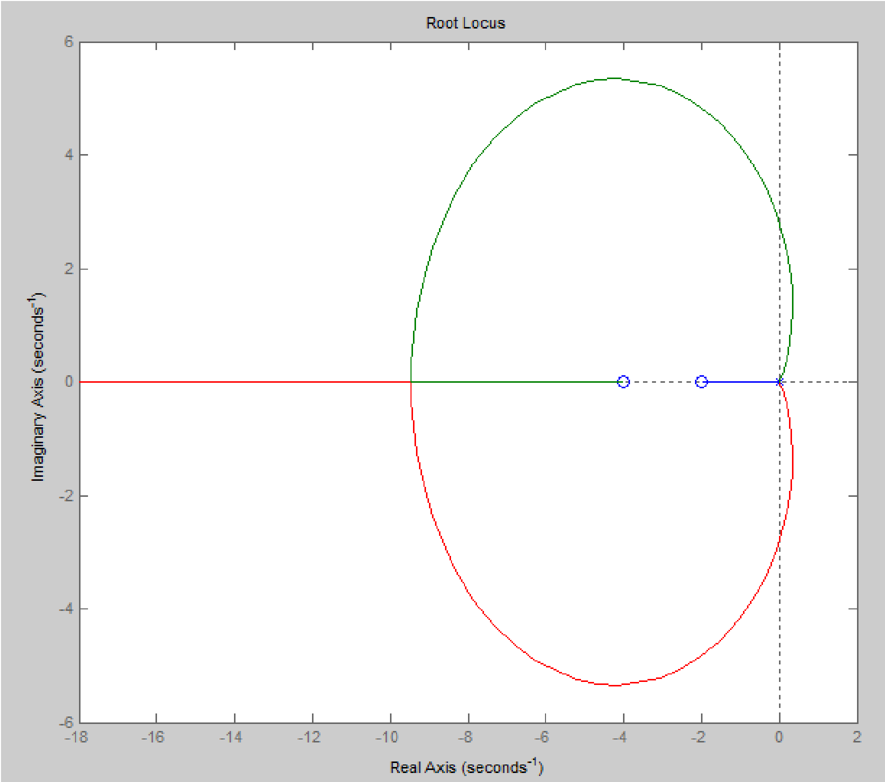
Για $s=j\omega$: $Q_0(s)=(j\omega)^3+K(j\omega)^2+6Kj\omega+8K=-j\omega^3-K\omega^2+6Kj\omega+8K=0$

οπότε πρέπει: $\operatorname{Re}Q_0(j\omega)=-K\omega^2+8K=0$ (1)

και $\operatorname{Im}Q_0(j\omega)=-\omega^3+6K\omega=0$ ή $\omega^2=6K$ (2)

Οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $K(-6K+8)=0\Rightarrow K_0=1.33$

Η εξίσωση (2) γίνεται: $\omega^2=8\Rightarrow\omega_0=\sqrt{8}=2.82$



Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές για $K > 1.33$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = s^3 + Ks^2 + 6Ks + 8K = 0$

Στο σημείο διακλάδωσης:

$$Q_0(s) = (s+9.46)^2(s+p_3) = s^3 + (p_3 + 18.92)s^2 + (18.92p_3 + 89.49)s + 89.49p_3 = 0$$

Οπότε	$K = p_3 + 18.92$	$p_3 = 1.85$
	$6K = 18.92p_3 + 89.49$	(τρίτος πόλος -1.85 στο μπλε τμήμα)
	$8K = 89.49p_3$	$K = 20.77$

δ) $G(s) = \dfrac{(s+2)^2}{s(s^2+2s+2)} = \dfrac{s^2+4s+4}{s^3+2s^2+2s} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Το σύστημα έχει $n=3$ πόλους: $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -1 \pm j$ και $m = 2$ ρίζες: $z_{1,2} = -2$

$n - m = 1$, άρα μία **ασύμπτωτος** με $\phi_{\alpha\sigma.} = 180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds} = 0$, δηλαδή

$$(2s+4)(s^3+2s^2+2s) - (s+2)^2(3s^2+4s+2) = (s+2)(-s^3-6s^2-6s-4) = 0$$

με λύσεις: $s_1 = -2$ (αποδεκτό), $s_2 = -4.95$ (αποδεκτό),

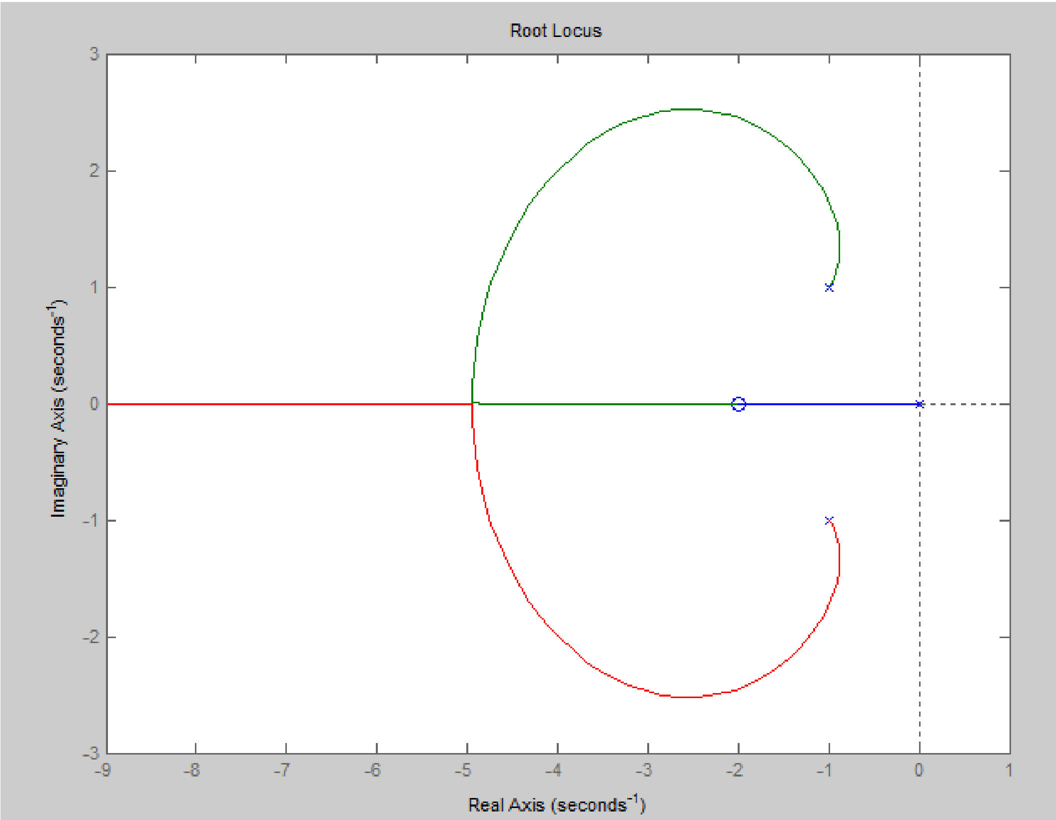
$s_{3,4} = -0.52 \pm 0.73j$ (απορρίπτονται)

Γωνία εξόδου από πόλο $p_2 = -1 + j$ **:**

$$\Phi_{p_1} + \Phi_{p_2} + \Phi_{p_3} - 2\Phi_z = 180^o \quad (1)$$

είναι $\quad \Phi_{p_1} = 180^o - \tan^{-1}\frac{1}{1} = 135^o, \ \Phi_{p_3} = 90^o, \ \Phi_z = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^o$

άρα $\quad \Phi_{p_2} = 180^o - 135^o - 90^o + 90^o = 45^o$



Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές $\forall K$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$Q_0(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + Ks^2 + 4Ks + 4K = s^3 + (K+2)s^2 + (4K+2)s + 4K = 0$$

Στο σημείο διακλάδωσης:

$$Q_0(s) = (s+4.95)^2(s+p_3) = s^3 + (p_3 + 9.9)s^2 + (9.9p_3 + 24.5)s + 24.5p_3 = 0$$

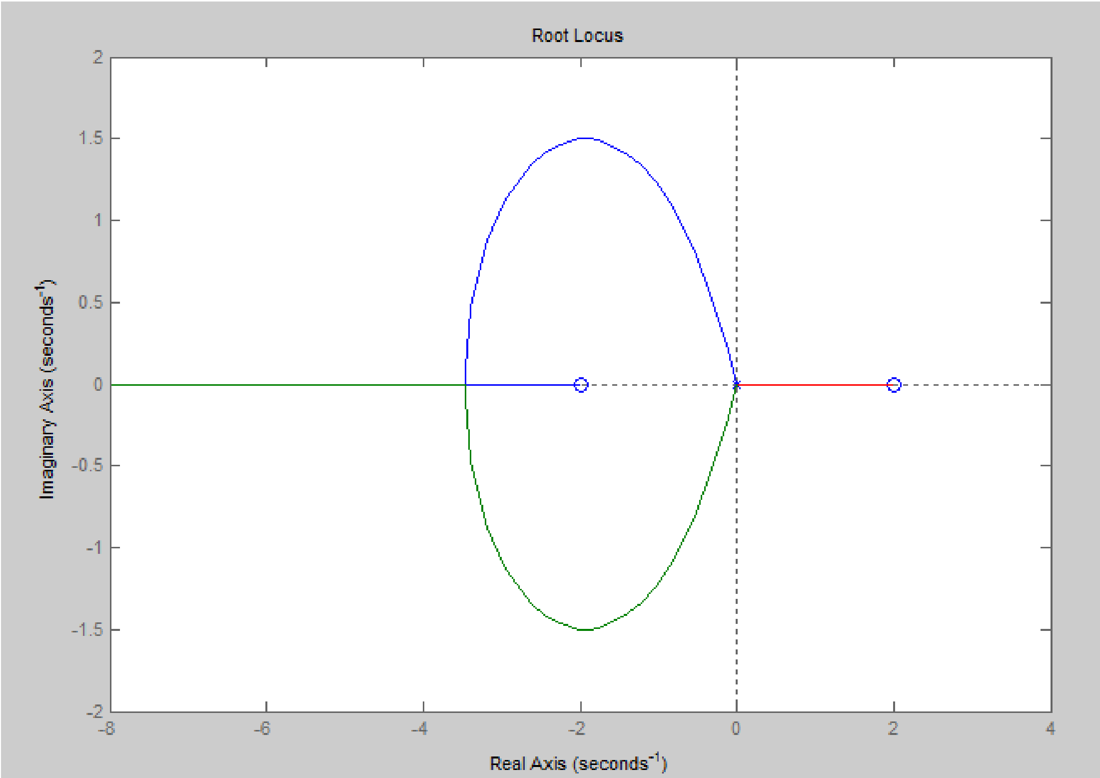
Οπότε

$K + 2 = p_3 + 9.9$	$p_3 = 1.54$
$4K + 2 = 9.9p_3 + 24.5$	(τρίτος πόλος -1.54 στο μπλε τμήμα)
$4K = 24.5p_3$	$K = 9.43$

ε) $G(s) = \dfrac{(s^2-4)}{s^3} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Το σύστημα έχει $n=3$ πόλους: $p_{1,2,3}=0$, και $m=2$ ρίζες: $z_{1,2}=\pm 2$

$n-m=1$, άρα μία **ασύμπτωτος** με $\phi_{\alpha\sigma.}=180^o$



Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$, δηλαδή $(2s)s^3-(s^2-4)3s^2 = s^2(-s^2+12)=0$

με λύσεις: $s_{1,2}=0$, $s_3=-3.46$ (αποδεκτά), $s_4=3.46$ (απορρίπτεται)

Γωνία εξόδου από πόλους: $3\Phi_p - \Phi_{z_1} - \Phi_{z_2} = 180^o$ (1)

είναι $\Phi_{z_1}=0^o$, $\Phi_{z_3}=180^o$

άρα $\Phi_p = 120^o$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $Q_0(s)=Q(s)+KP(s)=s^3+Ks^2-4K=0$

Στο σημείο διακλάδωσης:

$$Q_0(s)=(s+3.46)^2(s+p_3)=s^3+(p_3+6.92)s^2+(6.92p_3+11.97)s+11.97p_3=0$$

Οπότε	$K=p_3+6.92$	$p_3=-1.72$
	$0=9.92p_3+11.97$	(πόλος $+1.72$,ασταθής στο κόκκινο τμήμα)
	$-4K=11.97p_3$	$K=5.2$

Άσκηση 3 – Τόπος ριζών – Σύνθεση με τη μέθοδο του τόπου ριζών και την αναλυτική μέθοδο (2/5/17)

Δίνεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{s+7}{s(s+1)(s+3)}$.

α) Σχεδιάστε τον τόπο ριζών. Προσδιορίστε ασύμπτωτες, σημεία διακλάδωσης, σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα, συνθήκη ευστάθειας κλπ.

β) Βρείτε ελεγκτή Lead με συνάρτηση μεταφοράς $C(s)=K\dfrac{s+2}{s+p}$ ώστε το κλειστό σύστημα ελέγχου να έχει επιθυμητούς πόλους $p_{01,2}=-0.6\pm j$. Υπολογίστε τους συντελεστές K, p του ελεγκτή καθώς και τους δύο άλλους πόλους του κλειστού συστήματος.

i) Με τη μέθοδο του τόπου ριζών (υπολογισμός γωνιών και μέτρων με τα αντίστοιχα κριτήρια).

ii) Με την αναλυτική μέθοδο (σύγκριση χαρακτηριστικών πολυωνύμων).

iii) Σχεδιάστε τον τόπο ριζών του νέου συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$G^{'}(s)=\dfrac{(s+2)(s+7)}{s(s+1)(s+3)(s+p)}$.

Προσδιορίστε ασύμπτωτες, σημεία διακλάδωσης/θλάσης, σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα αν υπάρχουν, συνθήκη ευστάθειας κλπ.

Λύση

α) Τόπος ριζών: $G(s)=\dfrac{s+7}{s(s+1)(s+3)}=\dfrac{s+7}{s^3+4s^2+3s}=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Το σύστημα έχει $n=3$ πόλους: $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-3$ και $m=1$ ρίζα: $z_1=-7$,

$n-m=2$, άρα **2 ασύμπτωτες:** $s_{\alpha\sigma.}=\dfrac{p_1+p_2+p_3-z_1}{n-m}=1.5$ και $\phi_{\alpha\sigma.}=90^o,\ 180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$, δηλαδή

$s^3+4s^2+3s-(s+7)(3s^2+8s+3)=-(3s^3+29s^2+59s+21)=0$

με λύσεις: $s_1=-0.47$ (αποδεκτό),

$s_2=-2.3$, $s_3=-9.73$ (απορρίπτονται)

Σημεία τομής με το φανταστικό άξονα:

$$Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = s^3 + 4s^2 + (3+K)s + 7K = 0$$

Για $s = j\omega$ είναι:

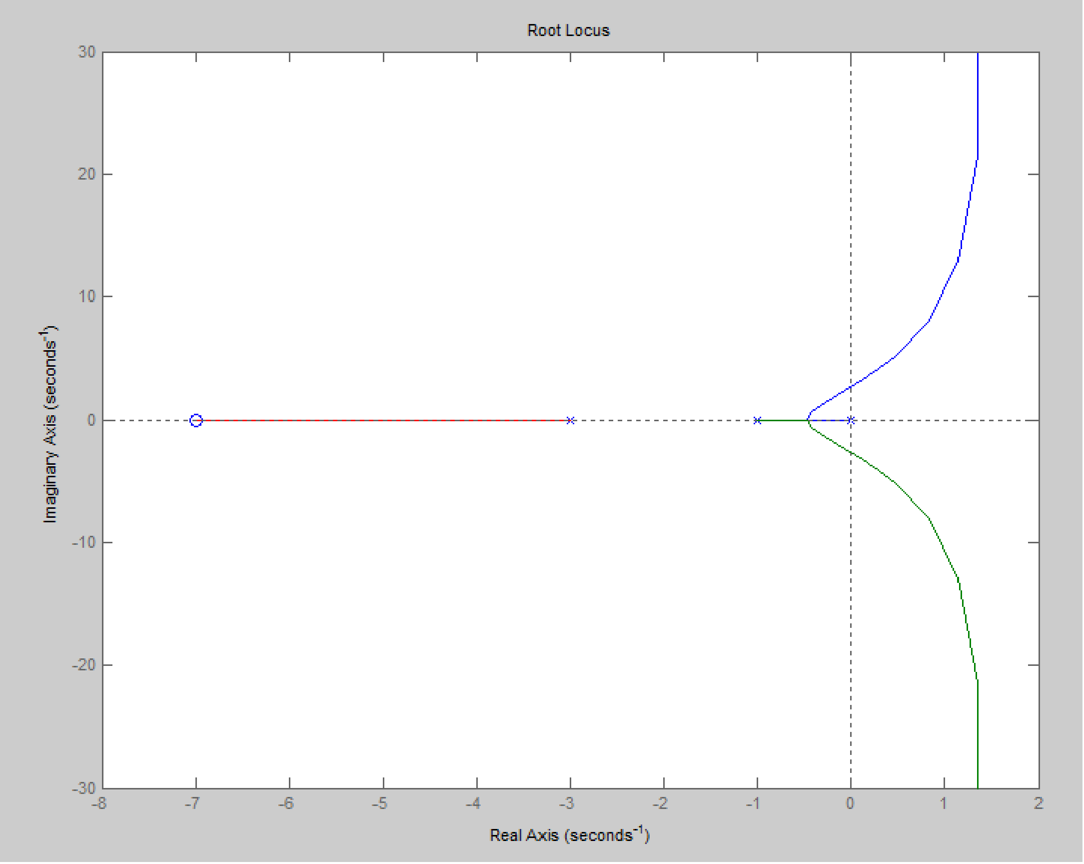
$$Q_0(s) = (j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + (3+K)j\omega + 7K = -j\omega^3 - 4\omega^2 + (3+K)j\omega + 7K = 0$$

οπότε πρέπει: $\quad \operatorname{Re} Q_0(j\omega) = -4\omega^2 + 7K = 0 \quad (1)$

και $\quad \operatorname{Im} Q_0(j\omega) = -\omega^3 + (3+K)\omega = 0$ ή $\omega^2 = 3+K \quad (2)$

Οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\quad -4(3+K) + 7K = 0 \Rightarrow K_0 = 4$

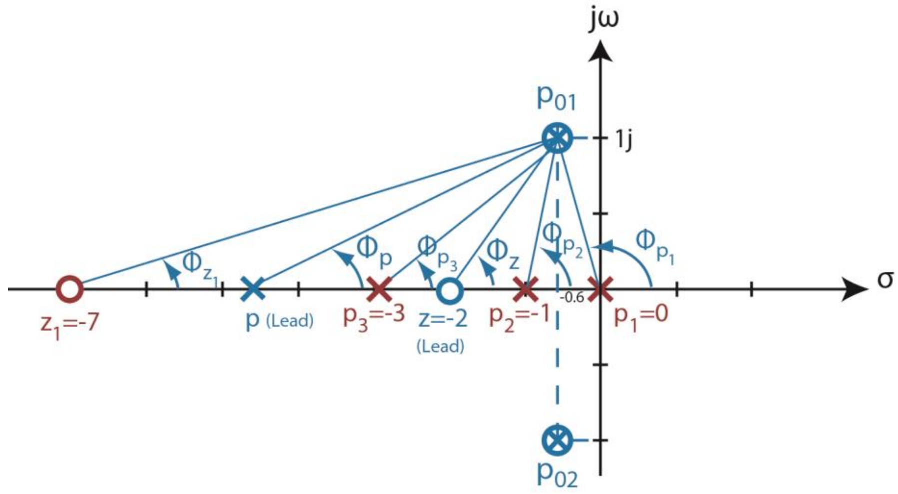
Η εξίσωση (2) γίνεται: $\quad \omega^2 = 7 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{7} = 2.64$



Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές για όλες τις τιμές του $K < 4$.

β_i) Προσδιορισμός ελεγκτή Lead $C(s) = K\dfrac{s+2}{s+p}$ με τη μέθοδο του τόπου ριζών

Επιθυμητοί πόλοι: $p_{01,2} = -0.6 \pm j$



Υπολογισμός του πόλου p με το κριτήριο γωνιών:

$$\Phi_{p_1} + \Phi_{p_2} + \Phi_{p_3} + \Phi_p - \Phi_{z_1} - \Phi_z = 180^o \tag{1}$$

είναι $\Phi_{p_1} = 180^o - \tan^{-1}\dfrac{1}{0.6} \cong 121^o$, $\Phi_{p_2} = \tan^{-1}\dfrac{1}{0.4} = 68.2^o$,

$\Phi_{p_3} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2.4} = 22.6^o$, $\Phi_{z_1} = \tan^{-1}\dfrac{1}{6.4} = 8.88^o$,

$\Phi_z = \tan^{-1}\dfrac{1}{1.4} = 35.5^o$

άρα $\Phi_p = 180^o - 121^o - 68.2^o - 22.6^o + 8.88^o + 35.5^o \cong 12.6^o$

$$\tan\Phi_p = \tan 12.6^o = 0.22 = \frac{1}{p-0.6} \to p \cong 5$$

Υπολογισμός του K με το κριτήριο μέτρων:

$$K = \frac{\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 \cdot \Delta p_3 \cdot \Delta p}{\Delta z_1 \cdot \Delta z} = \frac{1.17 \cdot 1.07 \cdot 2.6 \cdot 4.51}{6.47 \cdot 1.72} = 1.32$$

Εφόσον $\Delta p_1 = \sqrt{1^2 + 0.6^2} = 1.17$, $\Delta p_2 = \sqrt{1^2 + 0.4^2} = 1.07$,

$\Delta p_3 = \sqrt{1^2 + 2.4^2} = 2.6$, $\Delta p = \sqrt{1^2 + 4.4^2} = 4.51$,

$\Delta z_1 = \sqrt{1^2 + 6.4^2} = 6.47$, $\Delta z = \sqrt{1^2 + 1.4^2} = 1.72$,

άρα $C(s) = K\dfrac{s+2}{s+p} = 1.32\dfrac{s+2}{s+5}$ (ελεγκτής Lead)

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $G^{'}(s) = \dfrac{(s+2)(s+7)}{s(s+1)(s+3)(s+5)} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

$Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = s^4 + 9s^3 + (23+K)s^2 + (15+9K)s + 14K = 0$

Για οι πόλοι $K = 1.32$ του συστήματος είναι:

$p_{01,02} \cong -0.6 \pm j$, $p_{03} \cong -2.63$, $p_{04} \cong -5.16$.

β_ii) Προσδιορισμός ελεγκτή Lead $C(s) = K\dfrac{s+2}{s+p}$ **με την αναλυτική μέθοδο**

Συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου: $C(s)G(s) = K\dfrac{(s+2)(s+7)}{s(s+1)(s+3)(s+p)}$

Πραγματικό χαρακτηριστικό:

$$Q_0(s) = (s^3 + 4s^2 + 3s)(s+p) + K(s^2 + 9s + 14) = 0 \rightarrow$$
$$Q_0(s) = s^4 + (p+4)s^3 + (4p+3+K)s^2 + (3p+9K)s + 14K = 0$$

Επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο με επιθυμητούς πόλους $p_{01,2} = -0.6 \pm j$ και διορθωτικό πολυώνυμο $(s^2 + a_1 s + a_2)$:

$$Q^{'}{}_0(s) = \left((s+0.6)^2 + 1^2\right)(s^2 + a_1 s + a_2) = 0 \rightarrow$$
$$Q^{'}{}_0(s) = s^4 + (a_1 + 1.2)s^3 + (a_2 + 1.2a_1 + 1.36)s^2 + (1.2a_2 + 1.36a_1)s + 1.36a_2 = 0$$

Πρέπει $\quad Q_0(s) \overset{!}{=} Q_0^{'}(s)$

άρα

$a_1 + 1.2 = p + 4 \rightarrow a_1 = p + 2.8$ (1)

$a_2 + 1.2a_1 + 1.36 = 4p + 3 + K$ (2)

$1.2a_2 + 1.36a_1 = 3p + 9K$ (3)

$1.36a_2 = 14K \rightarrow a_2 = 10.3K$ (4)

από (1), (4) $\quad 10.3K + 1.2(p + 2.8) + 1.36 = 4p + 3 + K$ (2)

από (1), (4) $\quad 1.2 \cdot 10.3K + 1.36(p + 2.8) = 3p + 9K$ (3)

Επιλύοντας τις (2) και (3) προκύπτει: $\quad p \cong 5$ και $K \cong 1.34$

Επίσης από (1) και (4) προκύπτει: $\quad a_1 = 7.8$ και $a_2 = 13.8$

Οπότε ο ελεγκτής είναι: $\quad C(s) = K\dfrac{s+2}{s+p} \cong 1.34\dfrac{s+1}{s+5}$

Από το διορθωτικό πολυώνυμο $s^2 + a_1 s + a_2 = s^2 + 7.8s + 13.8 = 0$ προκύπτουν οι άλλοι δύο πόλοι του συστήματος: $p_{03} = -2.71$ και $p_{04} = -5.08$ και είναι ευσταθείς.

Τα αποτελέσματα επαληθεύονται και από τη μέθοδο του τόπου ριζών.

β_iii) Νέος τόπος ριζών: $G^{'}(s) = \dfrac{(s+2)(s+7)}{s(s+1)(s+3)(s+5)} = \dfrac{s^2+9s+14}{s^4+9s^3+23s^2+15s}$

Το σύστημα έχει $n=4$ πόλους: $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-3$, $p_4=-5$ και $m=2$ ρίζες: $z_1=-2$, $z_2=-7$, $n-m=2$, άρα 2 **ασύμπτωτες:**

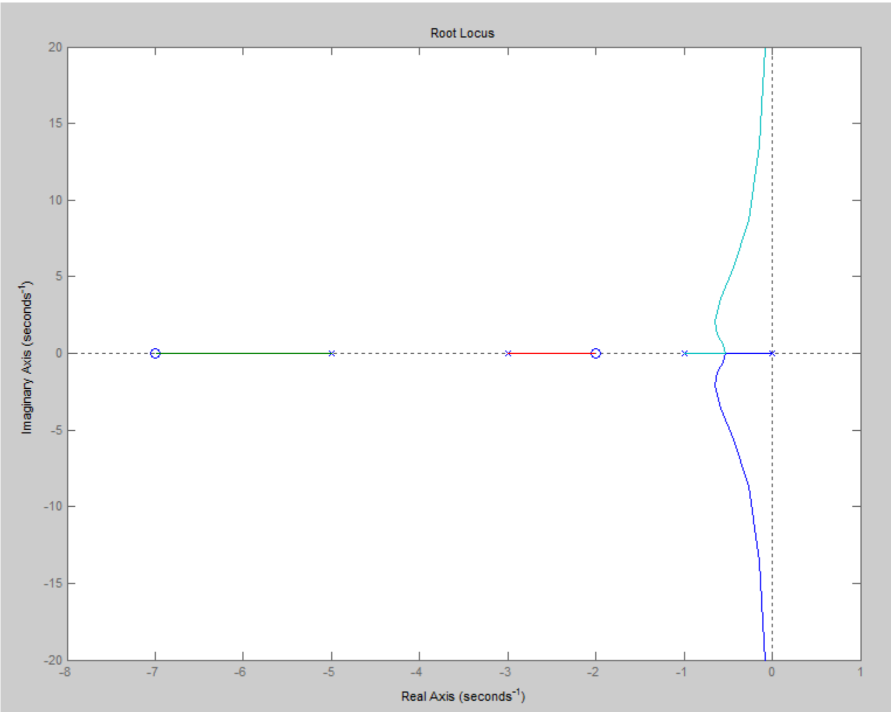
$s_{\alpha\sigma.} = \dfrac{p_1+p_2+p_3+p_4-z_1-z_2}{n-m} = 0$ και $\phi_{\alpha\sigma.} = 90^o,\ 180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds} = 0$, δηλαδή

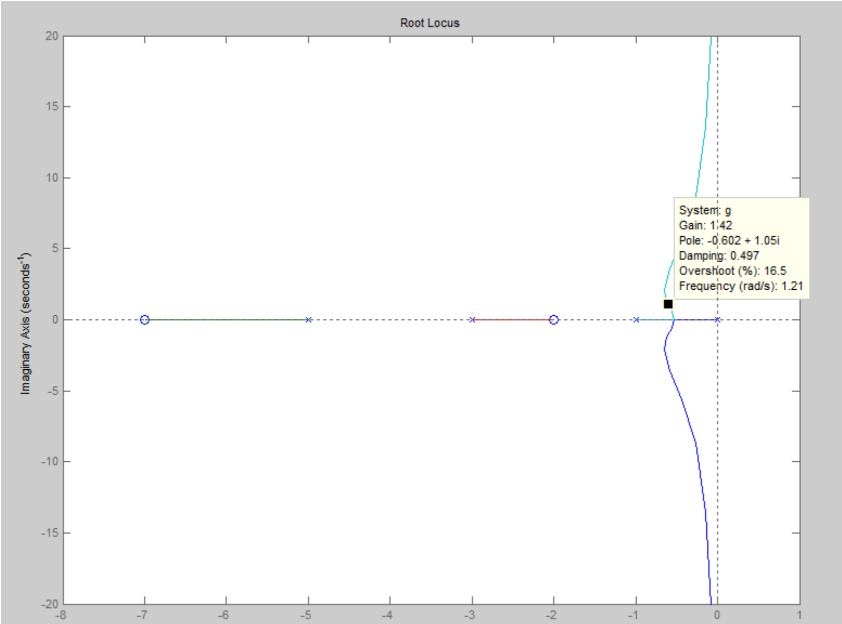
$$(2s+9)(s^4+9s^3+23s^2+15s)-(s^2+9s+14)(4s^3+27s^2+46s+15)=0 \rightarrow$$
$$-2s^5-36s^4-218s^3-570s^2-644s-210=0$$

με λύσεις: $s_1=-8.93$, $s_2=-4.21$, $s_{3,4}=-2.15\pm 0.8j$ (απορρίπτονται),

$s_5=-0.52$ (αποδεκτό)



Για $K \cong 1.34$ οι δύο από τους 4 πόλους είναι οι επιθυμητοί $p_{01,2} = -0.6 \pm j$.



Άσκηση 4 – Αρμονικά διαγράμματα Nyquist (16/5/17)

Σχεδιάστε τα διαγράμματα Nyquist των συστημάτων με συνάρτηση μεταφοράς:

α) $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+4)}$, **β)** $G(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s^3}$, **γ)** $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s(s^2+2s+2)}$

δ) $G(s)=\dfrac{s+2}{(s-1)^2}$, **ε)** $G(s)=\dfrac{(s+4)^3}{s^3}$

Υπολογίστε κατά περίπτωση ασύμπτωτες, σημεία τομής με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα κλπ. Επίσης υπολογίστε συνθήκη ευστάθειας και περιθώριο κέρδους του κλειστού συστήματος και επαληθεύστε τα αποτελέσματα με το κριτήριο Routh.

Λύση

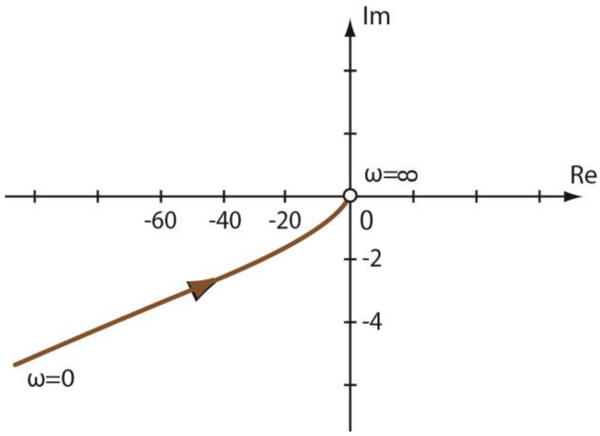
α) $G(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+4)}=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, με $n=3$, $m=2$ και τύπος $a=2$

έχουμε $\Phi_{(0)}=-a\dfrac{\pi}{2}=-180^o$, $\Phi_{(\infty)}=-(n-m)\dfrac{\pi}{2}=-90^o$

και $\Delta\Phi=[(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2}=[(2-3)-(0-2)]\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

για $s=j\omega$: $G(j\omega)=\dfrac{(j\omega+2)^2(-j\omega+4)}{(j\omega)^2(j\omega+4)(-j\omega+4)}=\dfrac{(-\omega^2+4j\omega+4)(-j\omega+4)}{-\omega^2(\omega^2+4^2)}\rightarrow$

$$G(j\omega)=\frac{j\omega^3+12j\omega+16}{-\omega^2(\omega^2+16)}$$



όπου $\operatorname{Re} G(j\omega) = \dfrac{16}{-\omega^2(\omega^2+16)}$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) = \dfrac{\omega^2+12}{-\omega(\omega^2+16)}$

για $\omega = 0$: $\operatorname{Re} G(j\omega) = -\infty$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) = -\infty$

για $\omega \to \infty$: $\operatorname{Re} G(j\omega) \cong -\dfrac{16}{\omega^4} \to 0_-$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) \cong -\dfrac{1}{\omega} \to 0_-$

Επαλήθευση ευστάθειας:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = s^3 + 4s^2 + K(s^2+4s+4) = s^3 + (4+K)s^2 + 4Ks + 4K = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4K \\ 2 & 4+K & 4K \\ 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 4K & \end{array} \qquad b_1 = -\frac{1}{4+K}\big(4K - 4K(4+K)\big) = \frac{K(4K+12)}{4+K} > 0$$

Οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $\forall K > 0$.

β) $G(s) = \dfrac{(s+2)(s+4)}{s^3} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, με $n = 3$, $m = 2$ και τύπος $a = 3$

έχουμε $\Phi_{(0)} = -a\dfrac{\pi}{2} = -270^o$, $\Phi_{(\infty)} = -(n-m)\dfrac{\pi}{2} = -90^o$

και $\Delta\Phi = [(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2} = [(2-3)-(0-3)]\dfrac{\pi}{2} = \pi$

για $s = j\omega$: $G(j\omega) = \dfrac{(j\omega+2)(j\omega+4)}{(j\omega)^3} = \dfrac{(-\omega^2+6j\omega+8)(j\omega^3)}{-j\omega^3(j\omega^3)} = \dfrac{-j\omega^2-6\omega+8j}{\omega^3}$

όπου $\operatorname{Re} G(j\omega) = \dfrac{-6}{\omega^2}$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) = \dfrac{-\omega^2+8}{\omega^3}$

για $\omega = 0$: $\quad \operatorname{Re} G(j\omega) = -\infty \quad$ και $\quad \operatorname{Im} G(j\omega) = +\infty$

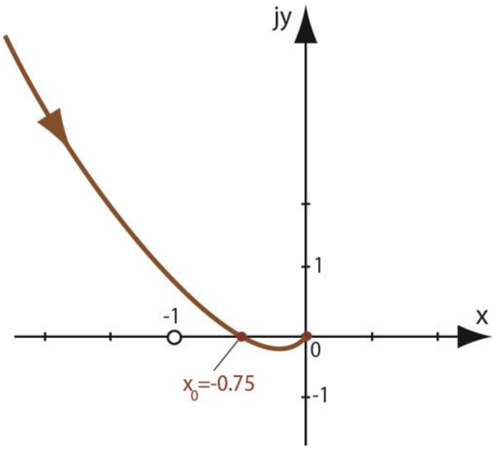
για $\omega \to \infty$: $\quad \operatorname{Re} G(j\omega) \to 0_- \quad$ και $\quad \operatorname{Im} G(j\omega) \cong -\dfrac{1}{\omega} \to 0_-$

Τομή με πραγματικό άξονα

$y = \operatorname{Im} G(j\omega) = 0$ για $-\omega^2 + 8 = 0$, άρα $\omega_0 \cong 2.83$.

Για $\omega_0 = 2.83$ είναι: $\quad x_0 = \operatorname{Re} G(j\omega_0) = \dfrac{-6}{8} = -0.75$

Περιθώριο κέρδους: $\quad K_0 = \dfrac{1}{|x_0|} = \dfrac{1}{0.75} = 1.33$



Επαλήθευση ευστάθειας:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = s^3 + Ks^2 + 6Ks + 8K = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 6K \\ 2 & K & 8K \\ 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 8K & \end{array} \qquad b_1 = -\frac{1}{K}\left(8K - 6K^2\right) = -8 + 6K > 0 .$$

Οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές για $K > 1.33$.

γ) $G(s) = \dfrac{(s+2)^2}{s(s^2+2s+2)} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, με $n = 3$, $m = 2$ και τύπος $a = 1$

έχουμε $\quad \Phi_{(0)} = -a\dfrac{\pi}{2} = -90^o$, $\Phi_{(\infty)} = -(n-m)\dfrac{\pi}{2} = -90^o$

και $\Delta\Phi = [(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2} = [(2-3)-(0-1)]\dfrac{\pi}{2} = 0^o$

για $s = j\omega$:

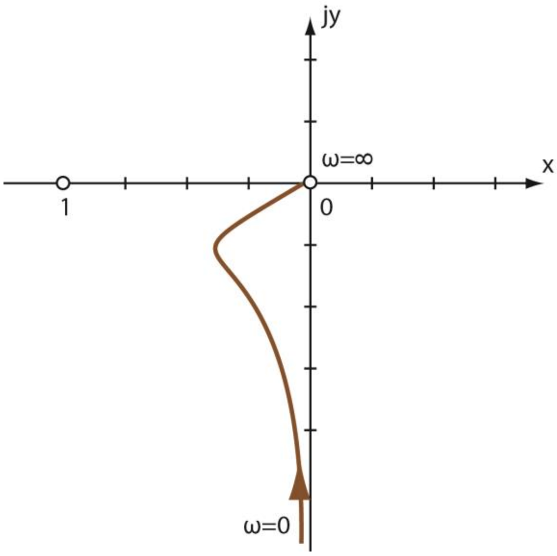
$$G(j\omega) = \frac{(j\omega+2)^2}{j\omega\left((j\omega)^2+2j\omega+2\right)} = \frac{(-\omega^2+4j\omega+4)(-j\omega)(-\omega^2+2-2j\omega)}{\omega^2(-\omega^2+2+2j\omega)(-\omega^2+2-2j\omega)} \to$$

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega^4-2\omega^3-2j\omega^2-8j}{\omega(\omega^4+4)}$$

όπου $\operatorname{Re}G(j\omega) = \dfrac{-2\omega^2}{\omega^4+4}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) = \dfrac{-\omega^4-2\omega^2-8}{\omega(\omega^4+4)}$

για $\omega = 0$: $\operatorname{Re}G(j\omega) = 0_-$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) = -\infty$

για $\omega \to \infty$: $\operatorname{Re}G(j\omega) \cong \dfrac{-\omega^2}{\omega^4} \to 0_-$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) \cong -\dfrac{1}{\omega} \to 0_-$



Επαλήθευση ευστάθειας:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = s^3+2s^2+2s+Ks^2+4Ks+4K = s^3+(2+K)s^2+(2+4K)s+4K = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

3	1	$2+4K$
2	$2+K$	$4K$
1	b_1	0
0	$4K$	

$$b_1 = -\frac{1}{2+K}\left(4K-(2+4K)(2+K)\right) = \frac{4K^2+4K+4}{2+K} > 0.$$

Οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $\forall K > 0$.

δ) $G(s)=\dfrac{s+2}{(s-1)^2}=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, με $n=2$, $m=1$ και τύπος $a=0$

έχουμε $\quad \Phi_{(0)}=-a\dfrac{\pi}{2}=0^o$, $\Phi_{(\infty)}=-(n-m)\dfrac{\pi}{2}=-90^o$

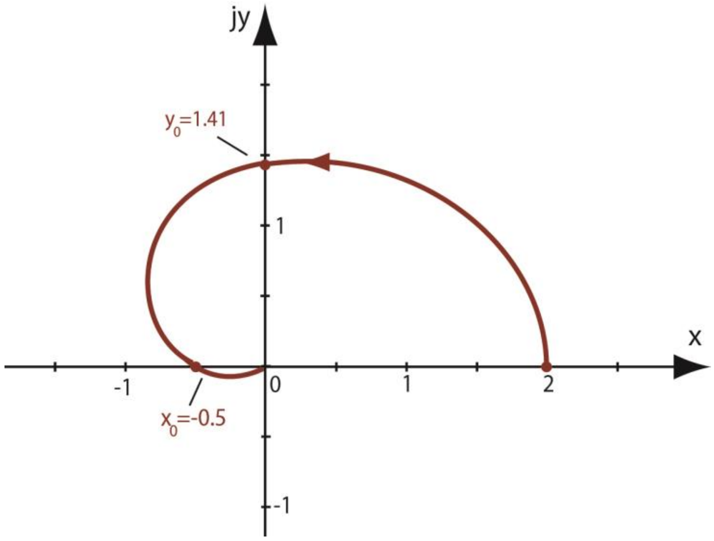
και $\quad \Delta\Phi=[(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2}=[(1-2)-2(0-2)]\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$

για $s=j\omega$: $\quad G(j\omega)=\dfrac{(j\omega+2)(-j\omega-1)^2}{(j\omega-1)^2(-j\omega-1)^2}=\dfrac{-j\omega^3+5j\omega-4\omega^2+2}{(1+\omega^2)^2}$

όπου $\quad \operatorname{Re}G(j\omega)=\dfrac{-4\omega^2+2}{(1+\omega^2)^2}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=\dfrac{-\omega^3+5\omega}{(1+\omega^2)^2}$

για $\omega=0$: $\quad \operatorname{Re}G(j\omega)=2$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)=0_+$

για $\omega\to\infty$: $\quad \operatorname{Re}G(j\omega)\cong\dfrac{-1}{\omega^2}\to 0_-$ και $\operatorname{Im}G(j\omega)\cong-\dfrac{1}{\omega}\to 0_-$



Τομή με φανταστικό άξονα

$x=\operatorname{Re}G(j\omega)=0$ για $-4\omega^2+2=0$, άρα $\omega_0=\sqrt{0.5}=0.707$.

Για $\omega_0=0.707$ είναι: $\quad y_0=\operatorname{Im}G(j\omega_0)=\dfrac{-0.707^3+5\cdot 0.707}{(1+0.707^2)^2}=1.41$

Τομή με πραγματικό άξονα

$y=\operatorname{Im}G(j\omega)=0$ για $-\omega^3+5\omega=0$, άρα $\omega_0=\sqrt{5}=2.24$.

Για $\omega_0=2.24$ είναι: $\quad x_0=\operatorname{Re}G(j\omega_0)=\dfrac{-4\cdot 5+2}{(1+5)^2}=-0.5$

Περιθώριο κέρδους: $K_0 = \dfrac{1}{|x_0|} = \dfrac{1}{0.5} = 2$

Επαλήθευση ευστάθειας:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = s^2 - 2s + 1 + Ks + 2K = s^2 + (K-2)s + 1 + 2K = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1+2K \\ 1 & K-2 & \\ 0 & 1+2K & \end{array}$$

οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $K-2>0 \rightarrow K>2$.

ε) $G(s) = \dfrac{(s+4)^3}{s^3} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, με $n=3$, $m=3$ και τύπος $a=3$

έχουμε $\Phi_{(0)} = -a\dfrac{\pi}{2} = -270^o$, $\Phi_{(\infty)} = -(n-m)\dfrac{\pi}{2} = 0^o$

και $\Delta\Phi = [(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2} = [(3-3)-(0-3)]\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$

για $s = j\omega$: $G(j\omega) = \dfrac{(j\omega)^3 + 12(j\omega)^2 + 48j\omega + 64}{(j\omega)^3} = \dfrac{\omega^3 - 12j\omega^2 - 48\omega + 64j}{\omega^3}$

όπου $\operatorname{Re}G(j\omega) = \dfrac{\omega^2 - 48}{\omega^2}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) = \dfrac{-12\omega^2 + 64}{\omega^3}$

για $\omega = 0$: $\operatorname{Re}G(j\omega) = -\infty$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) = +\infty$

για $\omega \rightarrow \infty$: $\operatorname{Re}G(j\omega) \cong \dfrac{\omega^2}{\omega^2} = 1$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) \cong -\dfrac{1}{\omega} \rightarrow 0_-$

Τομή με φανταστικό άξονα

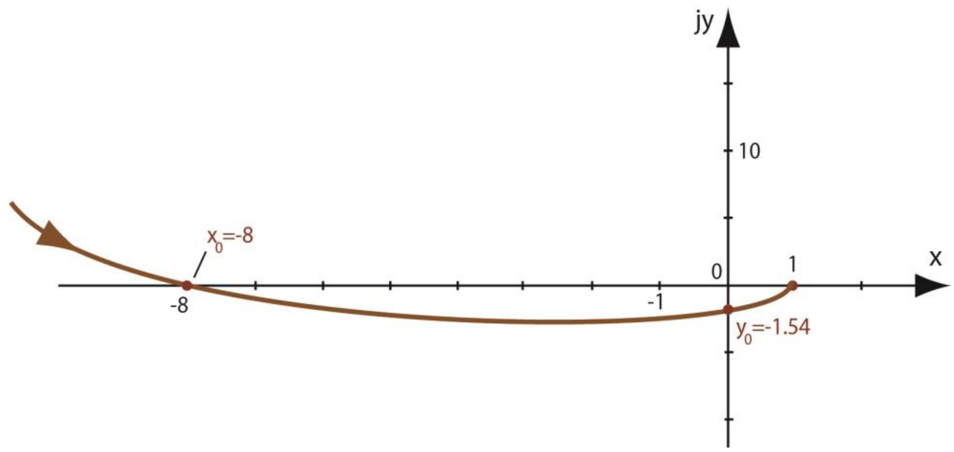
$x = \operatorname{Re}G(j\omega) = 0$ για $\omega^2 - 48 = 0$, άρα $\omega_0 = \sqrt{48} = 6.9$.

Για $\omega_0 = 6.9$ είναι: $y_0 = \operatorname{Im}G(j\omega_0) = \dfrac{-12\cdot 48 + 64}{6.9^3} = -1.54$

Τομή με πραγματικό άξονα

$y = \operatorname{Im}G(j\omega) = 0$ για $-12\omega^2 + 64 = 0$, άρα $\omega_0 = \sqrt{5.33} = 2.3$

Για $\omega_0 = 2.3$ είναι: $x_0 = \operatorname{Re}G(j\omega_0) = \dfrac{-5.33 - 48}{5.33} = -8$



Περιθώριο κέρδους: $K_0 = \frac{1}{|x_0|} = \frac{1}{8}$

Επαλήθευση ευστάθειας:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = (K+1)s^2 + 12Ks^2 + 48Ks + 64K = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & K+1 & 48K \\ 2 & 12K & 64K \\ 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 64K & \end{array} \qquad b_1 = -\frac{1}{12K}\left(64K(K+1) - 12K\cdot 48\right) \to -5.33(K+1) + 48K > 0\,.$$

οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $K > 1/8$.