ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ & ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ
Αν. Καθ.: Δ. ΔΗΜΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ
Καθ. Εφαρμ.: Σ. ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΟΥ

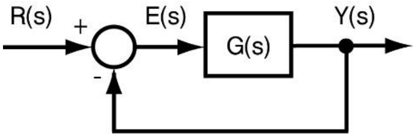
Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ

Ασκήσεις Πράξης

Εαρινό εξάμηνο 2017/18

Άσκηση 1 – Μόνιμα σφάλματα & ευστάθεια συστημάτων (ΟΜΑΔΑ Α - 27/03/18)

1. Δίνεται το παρακάτω κλειστό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{10(s+2)}{s^2+4s}$:



α) Υπολογίστε το e_∞ για $r(t)=10t$ και $r(t)=10t^2$

β) Βρείτε σε κάθε περίπτωση κατάλληλο ελεγκτή ώστε το μόνιμο σφάλμα να είναι $e_\infty = 0.2$.

Λύση

α) Μόνιμο σφάλμα

- $r(t)=10t$ και $R(s)=\dfrac{10}{s^2}$:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\dfrac{10}{s^2}}{1+\dfrac{10(s+2)}{s^2+4s}} = \lim_{s\to 0}\frac{10}{s+\dfrac{10(s+2)}{s+4}} = 2$$

- $r(t)=10t^2$ και $R(s)=\dfrac{20}{s^3}$:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\dfrac{20}{s^3}}{1+\dfrac{10(s+2)}{s^2+4s}} = \lim_{s\to 0}\frac{20}{s^2+s\dfrac{10(s+2)}{s+4}} = \infty$$

β) Προσδιορισμός ελεγκτή $C(s)$ **:**

- Για $r(t)=10t$ και $R(s)=\dfrac{10}{s^2}$ πρέπει $C(s)=K_p$ ώστε $e_\infty = 0.2$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+C(s)G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{10}{s+K_p\dfrac{10(s+2)}{s+4}} = \frac{10}{\dfrac{20K_p}{4}} \overset{!}{=} 0.2 \to K_p = 10$$

- Για $r(t)=10t^2$ και $R(s)=\dfrac{20}{s^3}$ πρέπει $C(s)=\dfrac{K_I}{s}$ ώστε $e_\infty = 0.2$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+C(s)G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{20}{s^2+\dfrac{K_I}{s}s^2\dfrac{10(s+2)}{s^2+4s}} = \frac{20}{\dfrac{20K_I}{4}} \overset{!}{=} 0.2 \to K_I = 20$$

2. Δίνεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q(s) = as^4 + 4s^3 + 4s^2 + s - b$. Εξετάστε με το κριτήριο Routh την ευστάθεια και σχεδιάστε το πεδίο ευστάθειας.

Λύση

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & a & 4 & -b \\ 3 & 4 & 1 & \\ 2 & b_1 & -b & \\ 1 & c_1 & 0 & \\ 0 & -b & & \end{array}$$

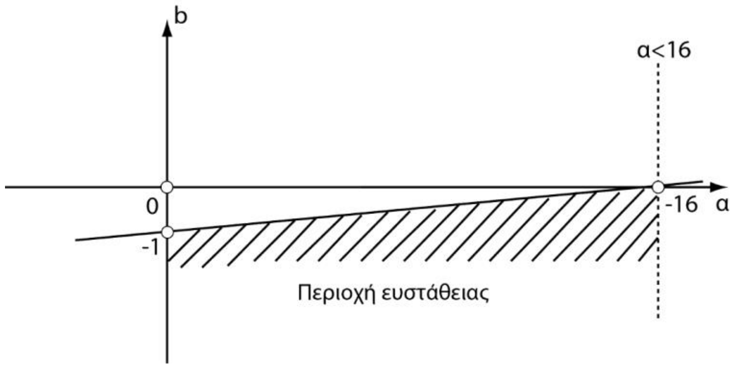
όπου $b_1 = -\frac{1}{4}(a-16) = -\frac{a}{4} + 4$ και $b_1 > 0$ όταν $-\frac{a}{4} + 4 > \Rightarrow a < 16$, $b_2 = -b$

$c_1 = -\frac{1}{b_1}(4b - b_1) = \frac{4b}{b_1} + 1$ και αντικαθιστώντας το b_1 έχουμε: $c_1 = \frac{16b + 16 - a}{16 - a}$

και $c_1 > 0$ όταν $6b + 16 - a > 0 \Rightarrow b > \frac{a}{16} - 1$

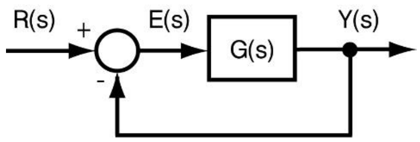
(για $a = 0$ είναι $b = -1$ και για $a = 16$ είναι $b = 0$.

Επίσης $d_1 = -b$. Σχεδιάζουμε την περιοχή ευστάθειας:



Άσκηση 1 – Μόνιμα σφάλματα & ευστάθεια συστημάτων (ΟΜΑΔΑ Β - 28/03/18)

1. Δίνεται σύστημα ελέγχου με μόνιμο σφάλμα $e_\infty = \lim_{t\to 0} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$:



α) Υπολογίστε το e_∞ για $r(t) = 10t$ και $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s^2}$

β) Υπολογίστε το e_∞ για $r(t) = 10t^2$ και $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s(s+4)}$

γ) Βρείτε σε κάθε περίπτωση τον κατάλληλο ελεγκτή ώστε το μόνιμο σφάλμα να είναι $e_\infty = 0.1$.

Λύση

Μόνιμο σφάλμα

α) $r(t) = 10t$ και $R(s) = \dfrac{10}{s^2}$, $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s^2}$:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot\dfrac{10}{s^2}}{1+\dfrac{10(s+2)}{s^2}} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s+\dfrac{10(s+2)}{s}} = 0$$

β) $r(t) = 10t^2$ και $R(s) = \dfrac{20}{s^3}$, $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s(s+4)}$:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot\dfrac{20}{s^3}}{1+\dfrac{10(s+2)}{s(s+4)}} = \lim_{s\to 0} \frac{20}{s^2+s\dfrac{10(s+2)}{s+4}} = \infty$$

γ) Προσδιορισμός ελεγκτή $C(s)$ **:**

- Για $r(t) = 10t$ και $R(s) = \dfrac{10}{s^2}$ πρέπει $C(s) = K_D s$ ώστε $e_\infty = 0.1$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+C(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s+K_D s\dfrac{10(s+2)}{s^2}} = \frac{10}{20K_D} \overset{!}{=} 0.1 \to K_D = 5$$

- Για $r(t) = 10t^2$ και $R(s) = \dfrac{20}{s^3}$ πρέπει $C(s) = \dfrac{K_I}{s}$ ώστε $e_\infty = 0.2$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+C(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{20}{s^2+\dfrac{K_I}{s}s^2\dfrac{10(s+2)}{s(s+4)}} = \frac{20}{20K_I} \overset{!}{=} 0.1 \to K_I = 10$$

2. Δίνεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q(s) = s^3 + (4+a)s^2 + (8+4a)s + 8a + K$.

Εξετάστε με το κριτήριο Routh την ευστάθεια και σχεδιάστε το πεδίο ευστάθειας.

Λύση

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8+4a \\ 2 & 4+a>0 & 8a+K \\ 1 & b_1>0 & \\ 0 & 8a+K>0 & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{4+a}\big(8a+K-(4+a)(8+4a)\big) =$$

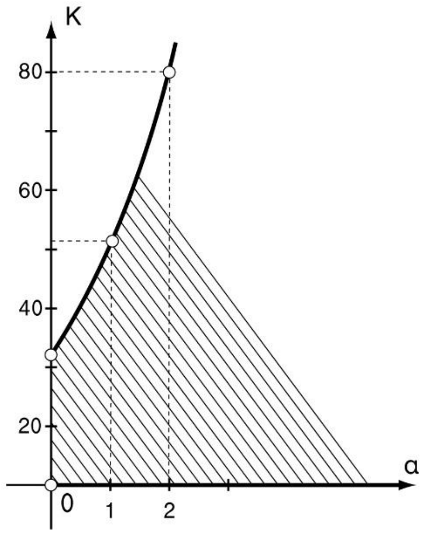
$$\frac{1}{4+a}\big(4a^2+16a+32-K\big) > 0$$

Άρα ευσταθές όταν $K < 4a^2 + 16a + 32$

Η εξίσωση $K < 4a^2 + 16a + 32$ δίνει τον παρακάτω πίνακα τιμών:

a	K
0	32
1	52
2	80

Το πεδίο ευστάθειας είναι:



Άσκηση 2 – Τόπος ριζών & Σύνθεση με τη μέθοδο του Τόπου Ριζών (ΟΜΑΔΑ Α&Β - 8/5/18)

Δίνεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{4}{(s-1)^2}$

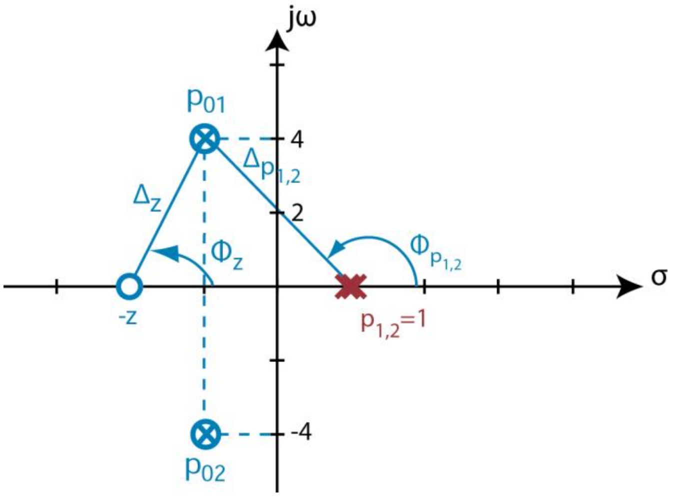
α) Βρείτε ελεγκτή PD με συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = K(s+z)$ ώστε το κλειστό σύστημα ελέγχου να έχει επιθυμητούς πόλους $p_{01,2} = -1 \pm 4j$.

β) Σχεδιάστε τον τόπο ριζών του νέου συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $G^{'}(s) = \frac{4(s+z)}{(s-1)^2}$.

Λύση

α) Προσδιορισμός ελεγκτή PD $C(s) = K(s+z)$

Επιθυμητοί πόλοι: $p_{01,2} = -1 \pm 4j$



Υπολογισμός της ρίζας z **με το κριτήριο γωνιών:** $\Phi_{p_1} + \Phi_{p_2} - \Phi_z = 180^o$

είναι $\Phi_{p_1} = \Phi_{p_2} = 180^o - \tan^{-1}\frac{4}{2} \cong 117^o$,

άρα $\Phi_z = 234^o - 180^o = 54^o$

$$\tan\Phi_p = \tan 54^o = 1.38 = \frac{4}{z-1} \to z = 3.9$$

Υπολογισμός του K **με το κριτήριο μέτρων:** $K = \frac{\Delta p_1 \cdot \Delta p_2}{4 \cdot \Delta z} = \frac{4.5 \cdot 4.5}{4 \cdot 4.9} \cong 1$

Εφόσον $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.5$, $\Delta z = \sqrt{4^2 + 2.9^2} = 4.9$,

άρα $C(s) = K(s+z) = 1 \cdot (s+3.9)$ (ελεγκτής PD)

β) Τόπος ριζών: $G^{'}(s)=\dfrac{4(s+3.9)}{(s-1)^2}$

Το σύστημα έχει $n=2$ πόλους: $p_{1,2}=+1$ και $m=1$ ρίζα: $z=-3.9$, $n-m=1$, άρα 1 **ασύμπτωτη:** $\phi_{\alpha\sigma.}=180^o$

Σημεία διακλάδωσης: $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$, δηλαδή

$$4(s^2-2s+1)-(4s+15.6)(2s-2)=0 \rightarrow 4s^2-31.2s-27.2=0$$

με λύσεις: $s_1=-1$, $s_2=-6.8$ (αποδεκτά)

Σημεία τομής με το φανταστικό άξονα:

$$Q_0(s)=Q(s)+KP(s)=s^2-2s+1+K(4s+15.6)=s^2+(4K-2)s+15.6K+1=0$$

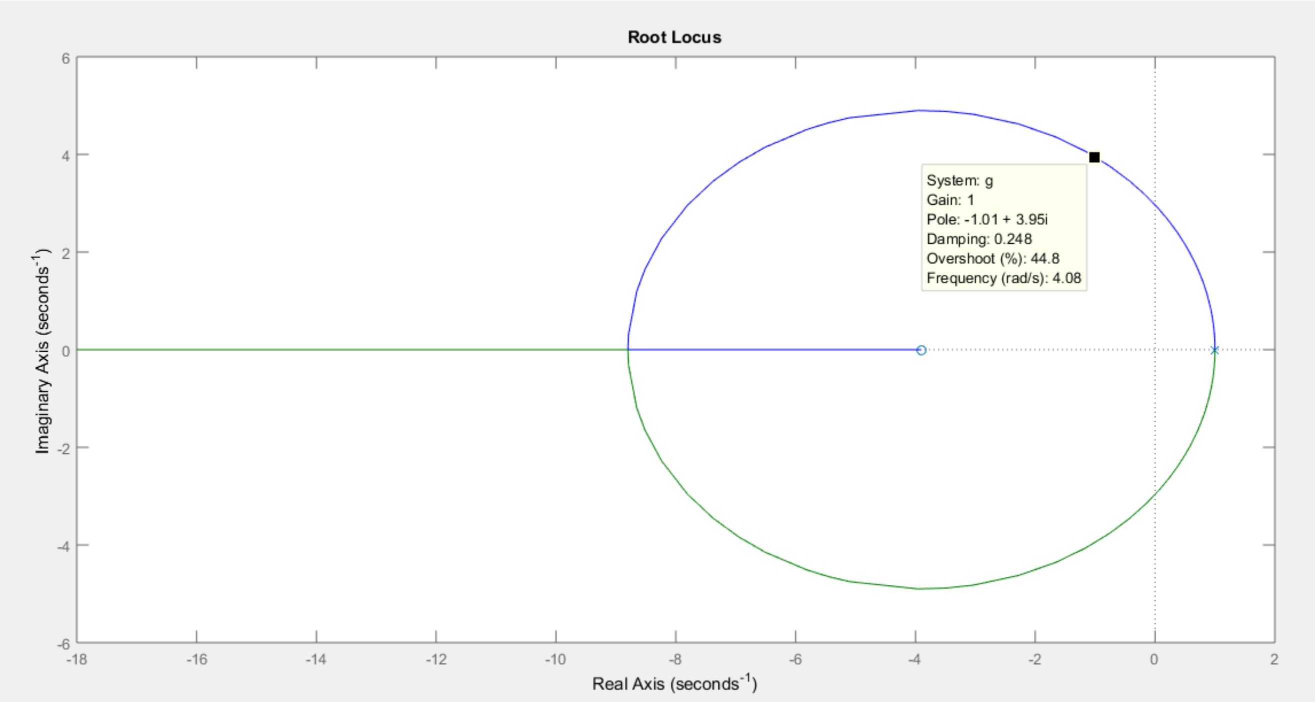
Για $s=j\omega$ είναι:

$$Q_0(s)=(j\omega)^2+(4K-2)j\omega+15.6K+1=-\omega^2+(4K-2)j\omega+15.6K+1=0$$

οπότε πρέπει: $\operatorname{Re}Q_0(j\omega)=-\omega^2+15.6K+1=0$ (1)

και $\operatorname{Im}Q_0(j\omega)=(4K-2)\omega=0$ ή $4K-2 \rightarrow K=0.5$ (2)

Οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2=8.8 \Rightarrow \omega_0=\sqrt{8.8}=2.96$



Το σύστημα είναι ευσταθές για $K>0.5$ και για $K=1$ οι δύο πόλοι είναι οι επιθυμητοί $p_{01,2}=-1\pm 4j$.

Άσκηση 3 – Αρμονικά διαγράμματα Nyquist (ΟΜΑΔΑ Α - 22/5/18)

Σχεδιάστε το διάγραμμα Nyquist συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$.

Βρείτε ασύμπτωτες, σημεία τομής με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα κλπ. Επίσης υπολογίστε συνθήκη ευστάθειας και περιθώριο κέρδους του κλειστού συστήματος και επαληθεύστε τα αποτελέσματα με το κριτήριο Routh.

Λύση

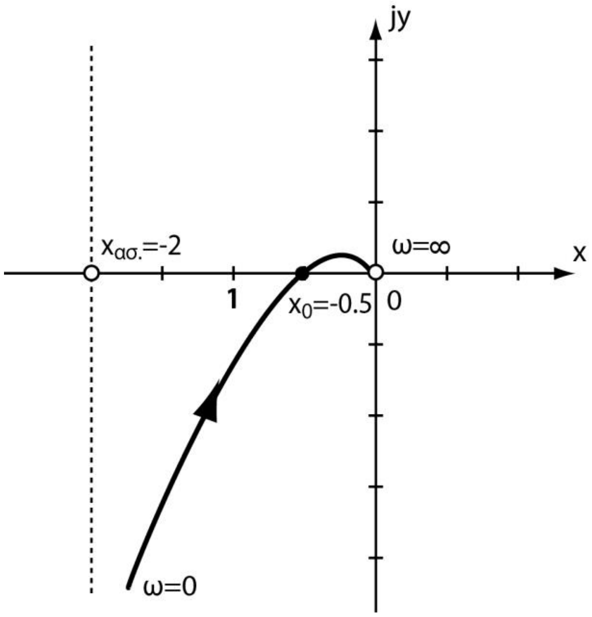
$G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2} = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, με $n = 3$, $m = 0$ και τύπος $a = 1$

έχουμε $\Phi_{(0)} = -a\dfrac{\pi}{2} = -90^o$, $\Phi_{(\infty)} = -(n-m)\dfrac{\pi}{2} = -270^o$

και $\Delta\Phi = [(m-n)-(m_0-n_0)-2(m_a-n_a)]\dfrac{\pi}{2} = [(0-3)-(0-1)]\dfrac{\pi}{2} = -\pi$

για $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{(-j\omega)(-j\omega+1)^2}{(j\omega)(j\omega+1)^2(-j\omega)(-j\omega+1)^2} = \frac{-j\omega(1-\omega^2-2j\omega)}{\omega^2(\omega^2+1)^2} = \frac{-2\omega+j(\omega^2-1)}{\omega(\omega^2+1)^2}$$



όπου $\operatorname{Re}G(j\omega) = \dfrac{-2}{(\omega^2+1)^2}$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) = \dfrac{\omega^2-1}{\omega(\omega^2+1)^2}$

για $\omega = 0$: $\operatorname{Re}G(j\omega) = -2$ (ασύμπτωτος) και $\operatorname{Im}G(j\omega) = -\infty$

για $\omega \to \infty$: $\operatorname{Re}G(j\omega) \cong \dfrac{-2}{\omega^4} = 0_-$ και $\operatorname{Im}G(j\omega) \cong \dfrac{1}{\omega^3} \to 0_+$

Τομή με πραγματικό άξονα: $y = \mathrm{Im}\,G(j\omega) = 0$ για $\omega^2 - 1 = 0$, άρα $\omega_0 = 1$.

Για $\omega_0 = 1$ είναι: $x_0 = \mathrm{Re}\,G(j\omega_0) = \frac{-2}{4} = -0.5$

Περιθώριο κέρδους: $K_0 = \frac{1}{|x_0|} = \frac{1}{0.5} = 2$

Επαλήθευση ευστάθειας - Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = s(s^2 + 2s + 1) + K = s^3 + 2s^2 + s + K = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & K \\ 1 & b & 0 \\ 0 & K & \end{array} \qquad b = -\frac{1}{2}(K-2) > 0$$

Οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές $K < 2$.

Άσκηση 3 – Αρμονικά διαγράμματα Nyquist (ΟΜΑΔΑ Β - 23/5/18)

Σχεδιάστε το διάγραμμα Nyquist συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{8}{(s+1)(s+2)^2}$. Βρείτε σημεία τομής με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα καθώς και τη συνθήκη ευστάθειας και το περιθώριο κέρδους του κλειστού συστήματος και επαληθεύστε τα αποτελέσματα με το κριτήριο Routh.

Λύση

$G(s) = \frac{8}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{P(s)}{Q(s)}$, με $n = 3$, $m = 0$ και τύπος $a = 0$

έχουμε $\Phi_{(0)} = -a\frac{\pi}{2} = 0^o$, $\Phi_{(\infty)} = -(n-m)\frac{\pi}{2} = -270^o$

και $\Delta\Phi = [(m-n) - (m_0 - n_0) - 2(m_a - n_a)]\frac{\pi}{2} = [(0-3)]\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

για $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{8\cdot(-j\omega+1)(-j\omega+2)^2}{(j\omega+1)(j\omega+2)^2\cdot(-j\omega+1)(-j\omega+2)^2} = \frac{8(-j\omega+1)(4-\omega^2-4j)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)^2} \rightarrow$$

$$G(j\omega) = \frac{8(4-\omega^2-4\omega^2) - j\omega 8(4-\omega^2+4)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)^2}$$

όπου $\operatorname{Re} G(j\omega) = \dfrac{8(4-5\omega^2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)^2}$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) = \dfrac{-8\omega(8-\omega^2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)^2}$

για $\omega = 0$: $\operatorname{Re} G(j\omega) = 2$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) = 0_-$

για $\omega \to \infty$: $\operatorname{Re} G(j\omega) \to 0_-$ και $\operatorname{Im} G(j\omega) \to 0_+$

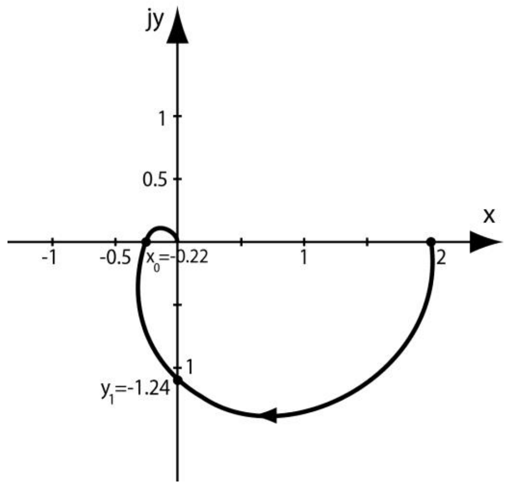
Τομή με φανταστικό άξονα: $x = \operatorname{Re} G(j\omega) = 0$ για $\omega^2 = \dfrac{4}{5} = 0.8$, άρα $\omega_0 = \sqrt{0.8} = 0.89$.

Για $\omega_0 = 0.89$ είναι: $y_1 = \operatorname{Im} G(j\omega_0) = \dfrac{-8 \cdot 0.89(8-0.8)}{(0.8+1)(0.8+4)^2} = -1.24$

Τομή με πραγματικό άξονα: $y = \operatorname{Im} G(j\omega) = 0$ για $-\omega^2 + 8 = 0$, άρα $\omega_0 \cong 2.83$.

Για $\omega_0 = 2.83$ είναι: $x_0 = \operatorname{Re} G(j\omega_0) = -0.22$

Περιθώριο κέρδους: $K_0 = \dfrac{1}{|x_0|} = \dfrac{1}{0.22} = 4.5$



Επαλήθευση ευστάθειας:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού συστήματος:

$$Q_0(s) = Q(s) + KP(s) = (s+1)(s+2)^2 + 8K = s^3 + 5s^2 + 8s + 8K + 4 = 0$$

Ο πίνακας και οι συντελεστές Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 8K+4 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 8K+4 & \end{array} \qquad b = -\frac{1}{8}\left(8K + 4 - 40\right) > 0.$$

Οπότε το κλειστό σύστημα ευσταθές για $0 < K < 4.5$.

Άσκηση 2 – Εξισώσεις στο Χώρο κατάστασης & λύση (ΟΜΑΔΑ Α&Β - 5/6/18)

Έστω πραγματικό σύστημα με εξισώσεις:

$$\overset{o}{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

α) Υπολογίστε και σχεδιάστε τις ελεύθερες χρονικές αποκρίσεις (δηλαδή $u(t) = 0$) των μεταβλητών $x_1(t)$, $x_2(t)$ καθώς και την τροχιά (x_1, x_2) με αρχικές συνθήκες $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

β) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς από τους χαρακτηριστικούς πίνακες $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$.

Λύση

α) Το ελεύθερο σύστημα (για $u(t) = 0$) έχει εξίσωση:

$$\overset{o}{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) \quad \Bigg| \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι $\underline{X}(s) = \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{x}_0$ ή $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}_0$,

όπου $\underline{\Phi}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{(s+1)(s+4)+2} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}$

ή $\underline{\Phi}(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}$

Οπότε $\underline{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{-2}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{s+2} + \dfrac{A_{12}}{s+3} & \dfrac{A_{21}}{s+2} + \dfrac{A_{22}}{s+3} \\ \dfrac{A_{31}}{s+2} + \dfrac{A_{32}}{s+3} & \dfrac{A_{41}}{s+2} + \dfrac{A_{42}}{s+3} \end{bmatrix}$

Με ανάλυση σε κλάσματα είναι:

$\Phi_{11} = \dfrac{A_{11}}{s+2} + \dfrac{A_{12}}{s+3} = \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{-1}{s+3}$, διότι $A_{11} = \left.\dfrac{s+4}{s+3}\right|_{s=-2} = 2$ και $A_{12} = \left.\dfrac{s+4}{s+2}\right|_{s=-3} = -1$

$\Phi_{12} = \dfrac{A_{21}}{s+2} + \dfrac{A_{22}}{s+3} = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{-1}{s+3}$, διότι $A_{21} = \left.\dfrac{1}{s+3}\right|_{s=-2} = 1$ και $A_{12} = \left.\dfrac{1}{s+2}\right|_{s=-3} = -1$

$\Phi_{21} = \dfrac{A_{31}}{s+2} + \dfrac{A_{32}}{s+3} = \dfrac{-2}{s+2} + \dfrac{2}{s+3}$, διότι $A_{31} = \left.\dfrac{-2}{s+3}\right|_{s=-2} = -2$ και $A_{32} = \left.\dfrac{-2}{s+2}\right|_{s=-3} = 2$

$\Phi_{22} = \dfrac{A_{41}}{s+2} + \dfrac{A_{42}}{s+3} = \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3}$, διότι $A_{41} = \left.\dfrac{s+1}{s+3}\right|_{s=-2} = -1$ και $A_{42} = \left.\dfrac{s+1}{s+2}\right|_{s=-3} = 2$

Άρα $\quad \underline{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{-1}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{-1}{s+3} \\ \dfrac{-2}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} & \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} \end{bmatrix}$

Και $\quad \underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$

Άρα $\quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -3e^{-2t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix}$

ή $\quad x_1(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \;\big|\; x_1(0) = 1$

$\quad x_2(t) = -3e^{-2t} + 4e^{-3t} \;\big|\; x_2(0) = 1$

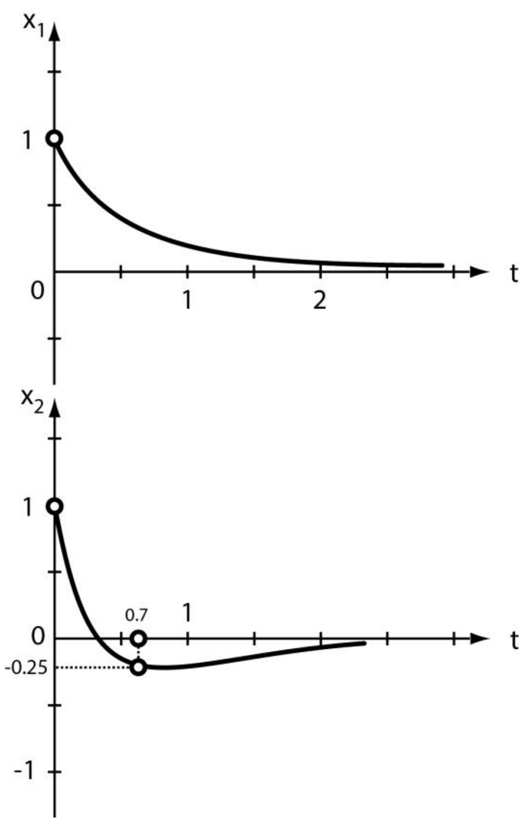
Διερεύνηση για μέγιστο ή ελάχιστο:

$$\frac{dx_1}{dt} = -6e^{-2t} + 6e^{-3t} = 0 \Rightarrow e^{-t} = 1 \Rightarrow -t = \ln 1 = 0 \;(\, x_1(0) = 1\,)$$

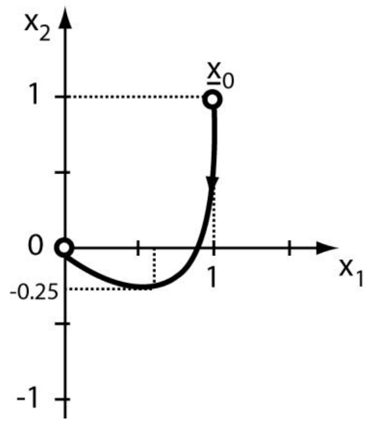
και $\quad \dfrac{dx_2}{dt} = 6e^{-2t} - 12e^{-3t} = 0 \Rightarrow e^{-t} = \dfrac{6}{12} \Rightarrow -t = \ln\dfrac{6}{12} \cong -0.7$ ή $t_{2m} = 0.7$ οπότε

$x_{2m} = -3e^{-2\cdot 0.7} + 4e^{-3\cdot 0.7} = -0.25$ δηλαδή ελάχιστο.

Χρονικές αποκρίσεις:



Τροχιά κατάστασης



β) Συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \underline{C} \cdot \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{B}$, όπου

$$\underline{\Phi}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}$$

Οπότε: $\underline{C} \cdot \underline{\Phi}(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & s+2 \end{bmatrix}$

και $G(s) = \underline{C} \cdot \underline{\Phi}(s) \cdot \underline{B} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & s+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+4}{(s+2)(s+3)}$