ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τ.Τ

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 2

Ενότητα #10: Λύση εξισώσεων εσωτερικής κατάστασης με χρήση μεθόδου ιδιοτιμών

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Υπολογισμός εσωτερικών σημάτων συστήματος εκφρασμένου στο χώρο κατάστασης.

- Χρήση μεθόδου ιδιοτιμών για τον υπολογισμό των σημάτων απόκρισης του συστήματος.

Περιεχόμενα ενότητας

- Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης: Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

- Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης - Μεθοδολογία

- Παράδειγμα

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης

Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

Μητρώο $\underline{A}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ πραγματικές και ξεχωριστές

- Έστω σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{x}(t) &= \underline{A}\cdot\underline{x}(t)+\underline{B}\cdot u(t) \\ y(t) &= \underline{C}\cdot\underline{x}(t)+\underline{D}\cdot u(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

- Υπολογίζουμε την απόκριση κάνοντας χρήση των ιδιοτιμών του μητρώου $\underline{A}$ (οι οποίες αντιστοιχούν στους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος!). Ιδιοτιμές $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ του μητρώου $\underline{A}$:

$$\underline{A}\cdot\underline{x}(t)=\lambda\cdot\underline{x}(t)\Rightarrow\left(\lambda\cdot\underline{I}-\underline{A}\right)\cdot\underline{x}(t)=\underline{0}\quad\forall\underline{x}(t)\neq\underline{0}\Rightarrow\det\left(\lambda\cdot\underline{I}-\underline{A}\right)=0\Rightarrow\lambda_1,\ldots,\lambda_n \qquad (2)$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

$$\underline{A}\cdot\underline{x}(t)=\lambda\cdot\underline{x}(t)\Rightarrow\left(\lambda\cdot\underline{I}-\underline{A}\right)\cdot\underline{x}(t)=\underline{0}\quad\forall\underline{x}(t)\neq\underline{0}\Rightarrow\det\left(\lambda\cdot\underline{I}-\underline{A}\right)=0\Rightarrow\lambda_1,\ldots,\lambda_n \qquad (2)$$

Σε κάθε ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\underline{\upsilon}_i$ που βρίσκεται ως:

$$\underline{A}\cdot\underline{\upsilon}_i=\lambda\cdot\underline{\upsilon}_i \qquad (3)$$

- Ορίζουμε το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων $\underline{M}=[\underline{\upsilon}_1, \underline{\upsilon}_2,\ldots, \underline{\upsilon}_n]$ όπως και το διαγώνιο μητρώο $\underline{\Lambda}$ ως ακολούθως:

$$\underline{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad (4)$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

- Διαγωνοποίηση του μητρώου $\underline{A}$, ως εξής:

$$\underline{M}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{M}=\underline{\Lambda},\ \text{ή}\ \underline{A}=\underline{M}\cdot\underline{\Lambda}\cdot\underline{M}^{-1} \qquad (5)$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

- Διαγωνοποίηση του μητρώου $\underline{A}$, ως εξής:

$$\underline{\mathrm{M}}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{\mathrm{M}}=\underline{\Lambda},\ \text{ή}\ \underline{A}=\underline{\mathrm{M}}\cdot\underline{\Lambda}\cdot\underline{\mathrm{M}}^{-1} \qquad (5)$$

- Αν θεωρήσουμε το ομογενές μέρος της πρώτης εξίσωσης των (2) [δηλαδή αν $u(t)$=0], τότε μέσω της (5) θα είναι:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{x}(t)=\underline{A}\cdot\underline{x}(t)=\underline{\mathrm{M}}\cdot\underline{\Lambda}\cdot\underline{\mathrm{M}}^{-1}\cdot\underline{x}(t) \qquad (6)$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

- Διαγωνοποίηση του μητρώου $\underline{A}$, ως εξής:

$$\underline{\mathrm{M}}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{\mathrm{M}}=\underline{\Lambda}, \text{ ή } \underline{A}=\underline{\mathrm{M}}\cdot\underline{\Lambda}\cdot\underline{\mathrm{M}}^{-1} \qquad (5)$$

- Αν θεωρήσουμε το ομογενές μέρος της πρώτης εξίσωσης των (2) [δηλαδή αν $u(t)$=0], τότε μέσω της (5) θα είναι:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{x}(t)=\underline{A}\cdot\underline{x}(t)=\underline{\mathrm{M}}\cdot\underline{\Lambda}\cdot\underline{\mathrm{M}}^{-1}\cdot\underline{x}(t) \qquad (6)$$

- Ορίζοντας τη βοηθητική διανυσματική μεταβλητή $\underline{z}(t)=\underline{\mathrm{M}}^{-1}\cdot\underline{x}(t)$ και μέσω της (6) έχουμε ότι:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{z}(t)=\underline{\Lambda}\cdot\underline{z}(t) \qquad (7)$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{z}(t) = \underline{\Lambda} \cdot \underline{z}(t) \qquad (7)$$

Άρα και

$$\underline{z}(t) = \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{z}(0) = e^{\Lambda \cdot t} \cdot \underline{z}(0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix} \cdot \underline{z}(0) \qquad (8)$$

οπότε μέσω του ορισμού $\underline{z}(t)=\underline{M}^{-1}\cdot\underline{x}(t)$ προκύπτει:

$$\begin{gathered} \underline{x}(t) = \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{z}(0) = \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{x}(0) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}(0) \\ \underline{\Phi}(t) = \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{M}^{-1} \end{gathered} \qquad (9)$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης – Ιδιοτιμές του $\underline{A}$

$$\underline{x}(t) = \underline{\mathrm{M}} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{z}(0) = \underline{\mathrm{M}} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{\mathrm{M}}^{-1} \cdot \underline{x}(0) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}(0) \qquad (9)$$

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{\mathrm{M}} \cdot \underline{\Phi}_0(t) \cdot \underline{\mathrm{M}}^{-1}$$

- Υπολογισμός της απόκρισης (συνέλιξη!)

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{\Phi}(\tau) \cdot \underline{B} \cdot u(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$y(t) = \underline{C} \cdot \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}(0) + \int_0^t \{\underline{C} \cdot \underline{\Phi}(\iota) \cdot \underline{B} + \underline{D}\} \cdot u(t-\tau) \cdot d\tau$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης

Μεθοδολογία

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης - Μεθοδολογία

Βήμα 1: Εύρεση ιδιοτιμών $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ του $\underline{A}$, υπολογισμός $\underline{\Phi}_0(t)$ από σχέση

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης - Μεθοδολογία

Βήμα 1: Εύρεση ιδιοτιμών $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ του $\underline{A}$, υπολογισμός $\underline{\Phi}_0(t)$ από σχέση

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και σχηματισμός του $M=[\, u_1, u_2, \ldots, u_n]$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης - Μεθοδολογία

<u>Βήμα 1</u>: Εύρεση ιδιοτιμών $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ του $\underline{A}$, υπολογισμός $\underline{\Phi}_0(t)$ από σχέση

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix}$$

<u>Βήμα 2</u>: Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και σχηματισμός του $M=[\,u_1,\, u_2,\ldots,\, u_n]$

<u>Βήμα 3</u>: Υπολογισμός του $\Phi(t)= M\cdot\Phi_0(t)\cdot M^{-1}$

Υπολογισμός απόκρισης από τις εξισώσεις κατάστασης - Μεθοδολογία

<u>Βήμα 1</u>: Εύρεση ιδιοτιμών $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ του $\underline{A}$, υπολογισμός $\underline{\Phi}_0(t)$ από σχέση

$$\underline{\Phi}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n \cdot t} \end{pmatrix}$$

<u>Βήμα 2</u>: Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και σχηματισμός του $M=[\, u_1, u_2,\ldots, u_n]$

<u>Βήμα 3</u>: Υπολογισμός του $\Phi(t)= M\cdot\Phi_0(t)\cdot M^{-1}$

<u>Βήμα 4</u>: Υπολογισμός αποκρίσεων $\underline{x}$(t), y(t)

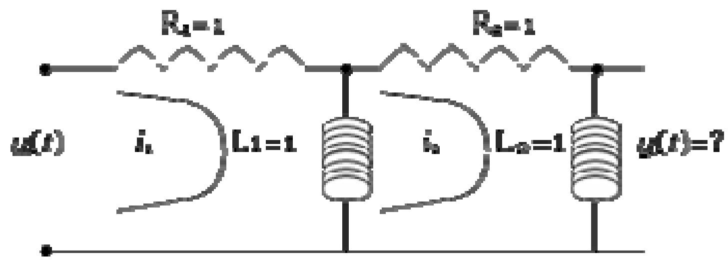
$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\cdot \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{\Phi}(\tau)\cdot \underline{B}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$y(t) = \underline{C}\cdot \underline{\Phi}(t)\cdot \underline{x}(0) + \int_0^t \{\underline{C}\cdot \underline{\Phi}(\iota)\cdot \underline{B} + \underline{D}\}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Θεωρούμε ξανά το κύκλωμα RL-RL και θα υπολογίσουμε την απόκριση με τη μέθοδο των ιδιοτιμών.



Οι εξισώσεις, όπως σχηματίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t)$$

Παράδειγμα

- Οι εξισώσεις, όπως σχηματίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{x}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t)$$

- <u>Βήμα 1</u>: Εύρεση ιδιοτιμών $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ του μητρώου $\underline{A}$, υπολογισμός $\underline{\Phi}_0(t)$

$$\det\left(\lambda \cdot \underline{I} - \underline{A}\right) = 0 \Rightarrow \det\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -0.382 \\ \lambda_2 = -2.618 \end{matrix} \quad \mathbf{=>} \ \underline{\Phi}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{-0.382 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-2.618 \cdot t} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

- <u>Βήμα 2</u>: Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και σχηματισμός του μητρώου <u>M</u>=[$\underline{\upsilon}_1$, $\underline{\upsilon}_2$]. Για το $\underline{\upsilon}_1$:

$$\underline{A}\cdot\underline{\upsilon}_1=\lambda_1\cdot\underline{\upsilon}_1\Rightarrow\left(\lambda_1\cdot\underline{I}-\underline{A}\right)\cdot\underline{\upsilon}_1=\underline{0}\Rightarrow\left(-0.382\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\upsilon_{11}\\\upsilon_{21}\end{pmatrix}=\underline{0}$$

$$\begin{pmatrix}1.618&1\\1&0.618\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\upsilon_{11}\\\upsilon_{21}\end{pmatrix}=\underline{0}\Rightarrow\begin{matrix}1.618\cdot\upsilon_{11}+\upsilon_{21}=0\\\upsilon_{11}+0.618\cdot\upsilon_{21}=0\end{matrix}\underset{\upsilon_{11}=1}{\Rightarrow}\begin{matrix}\upsilon_{11}=1\\\upsilon_{21}=-1.618\end{matrix}$$

Για το $\underline{\upsilon}_2$ θα προκύψει με όμοιο τρόπο υ_{12}=1 και υ_{22}=0.618. Άρα το μητρώο <u>M</u> (και $\underline{M}^{-1}$):

$$\underline{\mathrm{M}}=\begin{pmatrix}1&1\\-1.618&0.618\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{\mathrm{M}}^{-1}=\frac{1}{\det(\underline{\mathrm{M}})}\cdot\begin{pmatrix}0.618&1.618\\-1&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0.276&-0.447\\0.723&0.447\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

- Βήμα 3: Υπολογισμός του $\underline{\Phi}(t)= \underline{M}\cdot\underline{\Phi}_0(t)\cdot\underline{M}^{-1}$

$$\underline{\Phi}(t)=\underline{M}\cdot\underline{\Phi}_0(t)\cdot\underline{M}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1.618 & 0.618\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^{-0.382\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-2.618\cdot t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.276 & -0.447\\ 0.723 & 0.447\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.276\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.724\cdot e^{-2.618\cdot t} & -0.447\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.447\cdot e^{-2.618\cdot t}\\ -0.447\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.447\cdot e^{-2.618\cdot t} & 0.724\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.276\cdot e^{-2.618\cdot t}\end{pmatrix}$$

- Βήμα 4: Υπολογισμός της απόκρισης [ελεύθερη για $\underline{x}(0)=[1\ 1]^T$ και εξαναγκασμένη για $u(t)=1$]:

$$\underline{x}_\alpha(t)=\underline{\Phi}(t)\cdot\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}0.276\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.724\cdot e^{-2.618\cdot t} & -0.447\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.447\cdot e^{-2.618\cdot t}\\ -0.447\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.447\cdot e^{-2.618\cdot t} & 0.724\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.276\cdot e^{-2.618\cdot t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-0.171\cdot e^{-0.382\cdot t}+1.171\cdot e^{-2.618\cdot t}\\ 0.277\cdot e^{-0.382\cdot t}+0.723\cdot e^{-2.618\cdot t}\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

και

$$\underline{x}_{\varepsilon}(t)=\int_0^t \underline{\Phi}(\tau)\cdot \underline{B}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$=\int_0^t \begin{pmatrix} 0.276\cdot e^{-0.382\cdot\tau}+0.724\cdot e^{-2.618\cdot\tau} & -0.447\cdot e^{-0.382\cdot\tau}+0.447\cdot e^{-2.618\cdot\tau} \\ -0.447\cdot e^{-0.382\cdot\tau}+0.447\cdot e^{-2.618\cdot\tau} & 0.724\cdot e^{-0.382\cdot\tau}+0.276\cdot e^{-2.618\cdot\tau} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 1\cdot d\tau$$

$$=\begin{pmatrix} \int_0^t 0.105\cdot e^{-0.382\cdot t}+1.895\cdot e^{-2.618\cdot t} d\tau \\ \int_0^t -0.171\cdot e^{-0.382\cdot t}+1.171\cdot e^{-2.618\cdot t} d\tau \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-0.276\cdot e^{-0.382\cdot t}-0.724\cdot e^{-2.618\cdot t} \\ 0.447\cdot e^{-0.382\cdot t}-0.447\cdot e^{-2.618\cdot t} \end{pmatrix}$$

Τέλος Ενότητας