ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τ.Τ

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 2

Ενότητα #3: Ευστάθεια συστημάτων – Αλγεβρικό κριτήριο Routh

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους

Σκοποί ενότητας

- Η έννοια της ευστάθειας συστήματος
- Η ευστάθεια και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο συστήματος
- Εξακρίβωση ευστάθειας με αλγεβρικά κριτήρια
- Απαίτηση ευστάθειας κατά το σχεδιασμό ελεγκτή-χρήση κριτηρίου Routh

Περιεχόμενα ενότητας

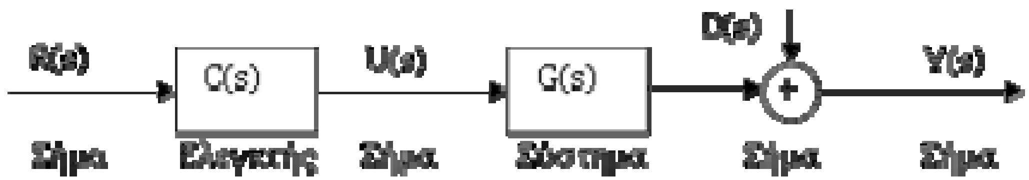
- Ευστάθεια συστημάτων
- Παρατηρήσεις στην ευστάθεια συστημάτων
- Κριτήριο Routh
- Παραδείγματα
- Ιδιαιτερότητες εφαρμογής κριτηρίου Routh
- Εφαρμογή κριτηρίου Routh στην ευστάθεια κλειστού βρόχου

Ευστάθεια συστημάτων

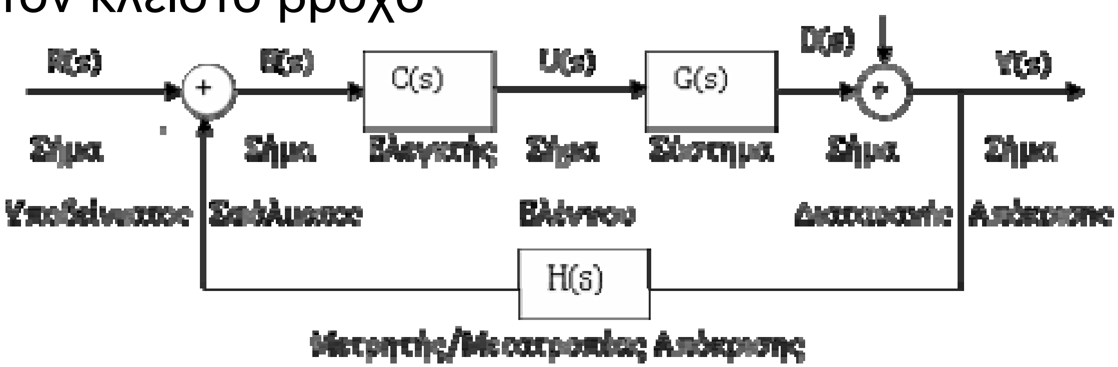
Ευστάθεια Συστημάτων

Η ευστάθεια είναι **<u>εσωτερική ιδιότητα του συστήματος</u>** και <u>δεν</u> εξαρτάται από το είδος του σήματος εισόδου:

• u(t) για τον ανοικτό βρόχο



• ή r(t) για τον κλειστό βρόχο



Ευστάθεια Συστημάτων

Η ευστάθεια συνδέεται με τη **συνάρτηση μεταφοράς (και άρα και τη διαφορική εξίσωση)** του συστήματος.

Διάφοροι ορισμοί της ευστάθειας έχουν δοθεί.

Ευστάθεια Συστημάτων

Η ευστάθεια συνδέεται με τη **συνάρτηση μεταφοράς (και άρα και τη διαφορική εξίσωση)** του συστήματος.

Διάφοροι ορισμοί της ευστάθειας έχουν δοθεί.

•Για παράδειγμα, ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ως ευσταθές όταν:

$$\forall\, |u(t)| < N \Rightarrow |y(t)| < M < \infty \qquad (1)$$

με u(t) σήμα εισόδου, y(t) απόκριση και N, M >0 και $\neq\infty$.

– Ο παραπάνω μαθηματικός ορισμός (που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **BIBO- Bounded Input, Bounded Output**) υπογραμμίζει ότι σε ένα ευσταθές σύστημα μια δεδομένη διέγερση δεν πρόκειται να προκαλέσει άπειρη απόκριση.

Ευστάθεια Συστημάτων

- Άλλος ορισμός βασίζεται στη χρήση της κρουστικής συνάρτησης δ(t) και χαρακτηρίζει ευσταθές το σύστημα για το οποίο:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \qquad (2)$$

Ευστάθεια Συστημάτων

- Άλλος ορισμός βασίζεται στη χρήση της κρουστικής συνάρτησης δ(t) και χαρακτηρίζει ευσταθές το σύστημα για το οποίο:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \qquad (2)$$

  – Άρα η **στιγμιαία διέγερση** του συστήματος προκαλεί **απόκριση που συγκλίνει τελικά στο μηδέν** (και δεν εμφανίζει ταλαντωτική συμπεριφορά, για παράδειγμα).

Ευστάθεια Συστημάτων

- Άλλος ορισμός βασίζεται στη χρήση της κρουστικής συνάρτησης δ(t) και χαρακτηρίζει ευσταθές το σύστημα για το οποίο:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \qquad (2)$$

  – Άρα η **<u>στιγμιαία διέγερση</u>** του συστήματος προκαλεί **<u>απόκριση που συγκλίνει τελικά στο μηδέν</u>** (και δεν εμφανίζει ταλαντωτική συμπεριφορά, για παράδειγμα).

  – Αντίστοιχα, όταν το ευσταθές σύστημα διεγείρεται από ένα **<u>σήμα βηματικής μορφής</u>**, τότε η **<u>απόκρισή του θα συγκλίνει σε κάποια συγκεκριμένη</u>** (όχι άπειρη) τιμή.

Ευστάθεια Συστημάτων

- Η ευστάθεια εξετάζεται από τους **πόλους*** του συστήματος.

* *Πόλοι του συστήματος είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (δηλαδή του πολυωνύμου του παρονομαστή) της συνάρτησης μεταφοράς του. Οι μηδενιστές (ρίζες) του συστήματος είναι οι λύσεις του πολυωνύμου του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς.*

Ευστάθεια Συστημάτων

- Η ευστάθεια εξετάζεται από τους **πόλους*** του συστήματος.
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

* *Πόλοι του συστήματος είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (δηλαδή του πολυωνύμου του παρονομαστή) της συνάρτησης μεταφοράς του. Οι μηδενιστές (ρίζες) του συστήματος είναι οι λύσεις του πολυωνύμου του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς.*

Ευστάθεια Συστημάτων

- Η ευστάθεια εξετάζεται από τους **πόλους*** του συστήματος.
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.
  - Αν το ευσταθές σύστημα έχει πόλους πραγματικούς αριθμούς, τότε αυτοί θα είναι αρνητικοί.

* *Πόλοι του συστήματος είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (δηλαδή του πολυωνύμου του παρονομαστή) της συνάρτησης μεταφοράς του. Οι μηδενιστές (ρίζες) του συστήματος είναι οι λύσεις του πολυωνύμου του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς.*

Ευστάθεια Συστημάτων

- Η ευστάθεια εξετάζεται από τους **πόλους*** του συστήματος.
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.
  - Αν το ευσταθές σύστημα έχει πόλους πραγματικούς αριθμούς, τότε αυτοί θα είναι αρνητικοί.
  - Αν το πραγματικό μέρος των πόλων είναι μηδέν, τότε εμφανίζεται ταλαντωτική συμπεριφορά της απόκρισης y(t) για σήμα εισόδου βηματικής (ή κρουστικής) μορφής που συνεχίζεται για «άπειρο» χρόνο. Αναφερόμαστε τότε σε **αδιάφορη ευστάθεια ή ουδετερότητα**.

* *Πόλοι του συστήματος είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (δηλαδή του πολυωνύμου του παρονομαστή) της συνάρτησης μεταφοράς του. Οι μηδενιστές (ρίζες) του συστήματος είναι οι λύσεις του πολυωνύμου του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς.*

Παρατηρήσεις στην ευστάθεια συστημάτων

Παρατηρήσεις

- Αναφερόμαστε στους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος *με τη δεδομένη συνδεσμολογία*.

- Αν, για παράδειγμα, ένα σύστημα G(s) είναι ευσταθές ως αυτοτελές σύστημα, δηλαδή έχει πόλους με αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε:

Παρατηρήσεις

- Αναφερόμαστε στους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος *με τη δεδομένη συνδεσμολογία*.

- Αν, για παράδειγμα, ένα σύστημα G(s) είναι ευσταθές ως αυτοτελές σύστημα, δηλαδή έχει πόλους με αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε:

ΔΕΝ μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του συστήματος σε κλειστό βρόχο

ΜΕΧΡΙ να υπολογίσουμε τη νέα συνάρτηση μεταφοράς που χαρακτηρίζει τη συνδεσμολογία αυτή και να εξετάσουμε τους νέους πόλους που προκύπτουν.

Παρατηρήσεις

- Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά επίπονη αν
  - έχουμε κάποιο σύνθετο ελεγκτή C(s) στον κλειστό βρόχο (γιατί;)
  - ή, πολύ απλά, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου που προκύπτει είναι υψηλής τάξης (βαθμού).

- Το ίδιο, προφανώς, ισχύει και για αυτοτελές σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο υψηλής τάξης (βαθμού).

- Για τούτο έχουν προταθεί κριτήρια που διερευνούν την ευστάθεια του συστήματος, χωρίς τη λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, αλλά απλά χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του.

Κριτήριο Routh

Κριτήριο Routh

- Υποθέσατε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$Q(s)= \alpha_n \cdot s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0.$$

- Τότε οι συντελεστές του γράφονται όπως στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_{n-1} = \dfrac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} & b_{n-3} = \dfrac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} & b_{n-5} = \ldots & \cdots \\
s^{n-3} & c_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1} b_{n-3}}{b_{n-1}} & c_{n-3} = \dfrac{b_{n-1}\alpha_{n-5} - \alpha_{n-1} b_{n-5}}{b_{n-1}} & \cdots & \\
| & | & | & & \\
s^0 & | & | & &
\end{array}$$

Κριτήριο Routh

s^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	...
s^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	...
s^{n-2}	$b_{n-1} = \dfrac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$	$b_{n-3} = \dfrac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n\alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$	$b_{n-5} = \ldots$	$\cdots$
s^{n-3}	$c_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-1}}$	$c_{n-3} = \dfrac{b_{n-1}\alpha_{n-5} - \alpha_{n-1}b_{n-5}}{b_{n-1}}$	$\cdots$	
|	|	|		
s^0	|	|		

- Αν οι συντελεστές της πρώτης στήλης (που φαίνονται με δίγραμμο περίγραμμα) δεν εμφανίζουν αλλαγή προσήμου τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Κριτήριο Routh

$$
\begin{array}{c|llll}
s^n & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots \\
s^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \dots \\
s^{n-2} & b_{n-1} = \dfrac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} & b_{n-3} = \dfrac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} & b_{n-5} = \dots & \cdots \\
s^{n-3} & c_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1} b_{n-3}}{b_{n-1}} & c_{n-3} = \dfrac{b_{n-1}\alpha_{n-5} - \alpha_{n-1} b_{n-5}}{b_{n-1}} & \dots & \\
| & | & | & & \\
s^0 & | & | & &
\end{array}
$$

- Αν οι συντελεστές της πρώτης στήλης (που φαίνονται με δίγραμμο περίγραμμα) δεν εμφανίζουν αλλαγή προσήμου τότε το σύστημα είναι ευσταθές.
- Σε άλλη περίπτωση, το πλήθος των εναλλαγών προσήμου δείχνει και το πλήθος των ασταθών πόλων.

Κριτήριο Routh

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

- Έστω χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q(s)= s^3-2\cdot s^2-5\cdot s+6$.
- Υποθέτουμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τους πόλους αυτού (οι οποίοι έχουν τις τιμές 1,-2 και 3). Με το κριτήριο Routh έχουμε:

s^3	1	-5
s^2	-2	6
s^1	$[(-2)\cdot(-5)-6\cdot 1]/(-2)$ $= -2$	0
s^0	$[(-2)\cdot 6-0/(-2)$ $=6$	

Παράδειγμα 1

- Έστω χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q(s)= s^3-2\cdot s^2-5\cdot s+6$.
- Υποθέτουμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τους πόλους αυτού (οι οποίοι έχουν τις τιμές 1,-2 και 3). Με το κριτήριο Routh έχουμε:

s^3	1	-5
s^2	-2	6
s^1	$[(-2)\cdot(-5)-6\cdot 1]/(-2)$ $= -2$	0
s^0	$[(-2)\cdot 6-0/(-2)$ $=6$	

- Εμφανίζονται δύο αλλαγές προσήμου (από 1 σε -2 και από -2 σε 6) στην στήλη που μας ενδιαφέρει, **άρα υπάρχουν δύο ασταθείς πόλοι** (οι οποίοι, προφανώς, θα είναι οι 1 και 3).

Παράδειγμα 2

- Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $Q(s)= s^3-3\cdot s+2$, όπου με χρήση του κριτηρίου Routh

s^3	1	-3
s^2	0!!	2
s^1	;;;;;	;;;
s^0	;;;;;	

Στην (ιδιάζουσα) περίπτωση που ένας όρος της εν λόγω στήλης προκύπτει ίσος με το 0, αντικαθιστούμε τον όρο αυτό από μια «πολύ μικρή θετική» ποσότητα ε, και συνεχίζουμε όπως και πριν. Έστω για παράδειγμα το οποίο θα εξεταστεί με το κριτήριο Routh:

Παράδειγμα 2 (Συνέχεια)

s^3	1	-3
s^2	0!! Αντικατάσταση από ε>0	2
s^1	[-3·ε-2]/ε	0
s^0	2	

- Ο όρος {[-3·ε-2]/ε} είναι αρνητικός, άρα υπάρχουν ασταθείς πόλοι.

- Δύο εναλλαγές προσήμου (από ε σε {[-3·ε-2]/ε} και από {[-3·ε-2]/ε} σε 2) άρα υπάρχουν δύο ασταθείς πόλοι (πράγμα σωστό αφού υπολογίζοντας τις λύσεις του συγκεκριμένου πολυωνύμου βρίσκουμε 1, 1 και -2).

Ιδιαιτερότητες εφαρμογής κριτηρίου Routh

Ιδιαιτερότητες εφαρμογής κριτηρίου Routh

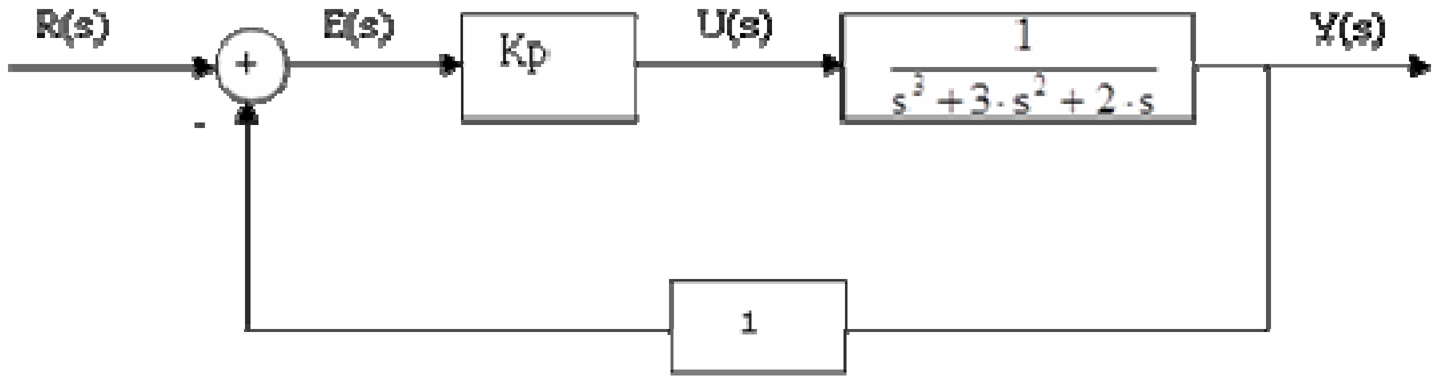
Αν σε μια ολόκληρη σειρά όλοι οι όροι είναι ίσοι με μηδέν, τότε

- ή υπάρχουν 2 συζυγείς φανταστικές λύσεις,
- ή 2 πραγματικές με διαφορετικά πρόσημα
- ή, τέλος, 2 μιγαδικές συμμετρικές ως προς το μηδέν.

Εφαρμογή κριτηρίου Routh στην ευστάθεια κλειστού βρόχου

Εφαρμογή κριτηρίου Routh στην ευστάθεια κλειστού βρόχου

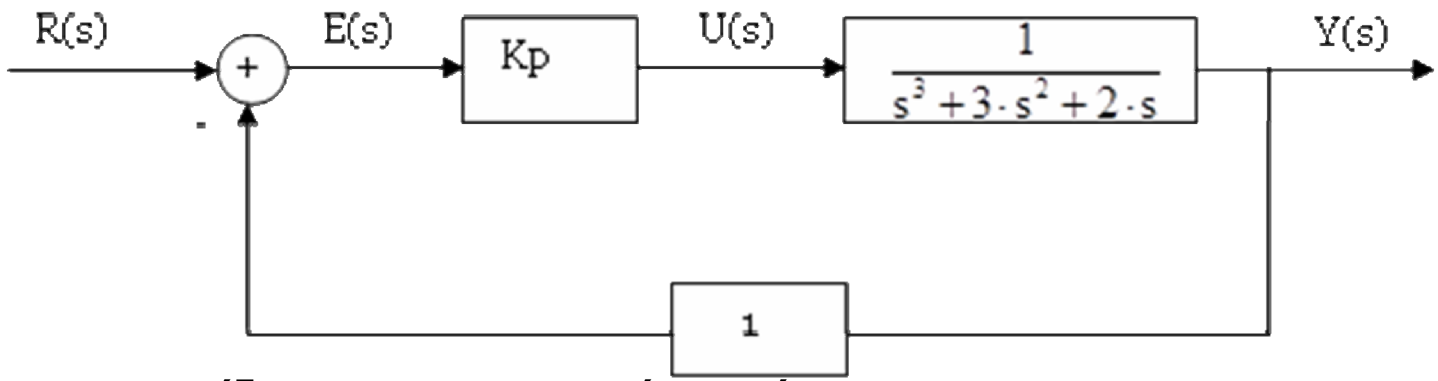
Έστω το παρακάτω σχήμα ελέγχου, στο οποίο θα πρέπει να καθοριστεί η τιμή του ελεγκτή Kp ώστε να έχουμε ευστάθεια:



Χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου θα έχουμε:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)\cdot G(s)}{1+C(s)\cdot G(s)} = \frac{Kp\cdot G(s)}{1+Kp\cdot G(s)} = \frac{Kp}{s^3+3\cdot s^2+2\cdot s+Kp}$$

Εφαρμογή κριτηρίου Routh στην ευστάθεια κλειστού βρόχου



Άρα σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

s^3	1	2
s^2	3	Kp
s^1	[6-Kp]/3	0
s^0	Kp	

που επιβάλλει για ευστάθεια του συστήματος θετικότητα του όρου [6- Kp], δηλαδή **Kp<6**.

Τέλος Ενότητας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης