



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τ.Τ



Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 2

Ενότητα #4: Ευστάθεια συστημάτων κλειστού βρόχου με
τη μέθοδο του Τόπου Ριζών

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σκοποί ενότητας

- Η έννοια του Τόπου Ριζών συστήματος.
- Μέθοδος Τόπου Ριζών συγκριτικά με εναλλακτικές
- Κανόνες χάραξης - εφαρμογή σε παραδείγματα

Περιεχόμενα ενότητας

- Ευστάθεια συστήματος κλειστού βρόχου με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών
- Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος
- Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος
- Παρατηρήσεις
- Παράδειγμα

Ευστάθεια συστήματος με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

Ευστάθεια συστήματος με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

- Θέτοντας ευσταθές σύστημα σε κλειστό βρόχο μπορεί να οδηγήσει σε ένα νέο ασταθές σύστημα ανάλογα με την επιλογή ελεγκτή.

Ευστάθεια συστήματος με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

- Θέτοντας ευσταθές σύστημα σε κλειστό βρόχο μπορεί να οδηγήσει σε ένα νέο ασταθές σύστημα ανάλογα με την επιλογή ελεγκτή.
- Προφανώς, ισχύει και το αντίθετο: Με χρήση κατάλληλου ελεγκτή εξασφαλίζουμε ευστάθεια στο νέο σύστημα κλειστού βρόχου, ενώ το αρχικό σύστημα ήταν ασταθές ως αυτοτελής οντότητα.

Ευστάθεια συστήματος με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

- Θέτοντας ευσταθές σύστημα σε κλειστό βρόχο μπορεί να οδηγήσει σε ένα νέο ασταθές σύστημα ανάλογα με την επιλογή ελεγκτή.
- Προφανώς, ισχύει και το αντίθετο: Με χρήση κατάλληλου ελεγκτή εξασφαλίζουμε ευστάθεια στο νέο σύστημα κλειστού βρόχου, ενώ το αρχικό σύστημα ήταν ασταθές ως αυτοτελής οντότητα.
- Δηλαδή η κατάλληλη σχεδίαση ελεγκτών, δύναται να εγγυηθεί:
 - τόσο την ευστάθεια, όσο και
 - συγκεκριμένες απαιτήσεις απόδοσης (μεταβατική απόκριση, μόνιμο σφάλμα) του συστήματος σε κλειστό βρόχο.

Ευστάθεια συστήματος με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

- Είδαμε σχεδιασμό ελεγκτή για το σύστημα κλειστού βρόχου με χρήση αλγεβρικών κριτηρίων ευστάθειας Routh (βλ. ενότητα 3):

Η μέθοδος απαιτούσε τη χρήση των εξισώσεων κλειστού βρόχου για τη διερεύνηση της ευστάθειας αυτού.

Ευστάθεια συστήματος με χάραξη Γεωμετρικού Τόπου Ριζών

- Είδαμε σχεδιασμό ελεγκτή για το σύστημα κλειστού βρόχου με χρήση αλγεβρικών κριτηρίων ευστάθειας Routh (βλ. ενότητα 3):

Η μέθοδος απαιτούσε τη χρήση των εξισώσεων κλειστού βρόχου για τη διερεύνηση της ευστάθειας αυτού.

- Θα εξετάσουμε τη σχεδίαση ελεγκτή με χρήση της μεθόδου του τόπου ριζών:

Η μέθοδος δεν χρησιμοποιεί εκτεταμένα τις εξισώσεις κλειστού βρόχου για τη διερεύνηση της ευστάθειας αυτού.*

** Μόνο σε ένα στάδιο της χάραξης απαιτείται η χρήση της εξίσωσης κλειστού βρόχου.*

Γεωμετρικός τόπος ριζών συστήματος

Αρχή σχεδιασμού

1. Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Θέτοντας σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=P(s)/Q(s)$ σε συνδεσμολογία κλειστού βρόχου έστω με τον απλούστερο ελεγκτή (αναλογίας K_p) έχουμε τη δημιουργία ενός νέου συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)} \quad (1)$$

Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Θέτοντας σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=P(s)/Q(s)$ σε συνδεσμολογία κλειστού βρόχου έστω με τον απλούστερο ελεγκτή (αναλογίας K_p) έχουμε τη δημιουργία ενός νέου συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)} \quad (1)$$

- Η συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου θα καθορίζεται από τους πόλους του νέου χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$Q(s) + K_p \cdot P(s),$$

οι οποίοι εξαρτώνται με τη σειρά τους από την τιμή του K_p .

Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Για να ερευνησει κανείς την ευστάθεια και τα χαρακτηριστικά απόκρισης ενός τέτοιου κλειστού συστήματος θα πρέπει:
 - να υπολογίσει τους πόλους για όλες τις τιμές του K_p που τον ενδιαφέρουν, ή,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)}$$

Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Για να ερευνηθεί κανείς την ευστάθεια και τα χαρακτηριστικά απόκρισης ενός τέτοιου κλειστού συστήματος θα πρέπει:
 - να υπολογίσει τους πόλους για όλες τις τιμές του K_p που τον ενδιαφέρουν (όχι πολύ ρεαλιστικό!)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)}$$

- να εξετάσει τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά πολυώνυμα κλειστού βρόχου με το κριτήριο Routh*.

**Φυσικά τότε γνωρίζουμε μόνο αν έχουμε (ή όχι) ευσταθές σύστημα κλειστού βρόχου και όχι το βαθμό της ευστάθειας αυτού!*

Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η σχεδίαση του γεωμετρικού τόπου ριζών του συστήματος:
 - Η μέθοδος χρησιμοποιεί τους πόλους του αυτοτελούς συστήματος $G(s)$ [δηλαδή τις ρίζες του πολυωνύμου $Q(s)$]

και

Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η σχεδίαση του γεωμετρικού τόπου ριζών του συστήματος:
 - Η μέθοδος χρησιμοποιεί τους πόλους του αυτοτελούς συστήματος $G(s)$ [δηλαδή τις ρίζες του πολυωνύμου $Q(s)$]
 - και
 - με χρήση συγκεκριμένων κανόνων δίνει τις τοποθεσίες των πόλων κλειστού βρόχου [δηλαδή των ριζών του πολυωνύμου $Q(s)+K_p \cdot P(s)$] στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re για κάθε τιμή του K_p από το μηδέν έως και το άπειρο.

Αρχή σχεδιασμού του γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- Η διαδοχική παράθεση των τοποθεσιών των πόλων αυτών για αυξανόμενο K_r αποτελεί το γεωμετρικό τόπο (τροχιές) των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $Q(s)+K_r \cdot P(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re .
- Άρα έχουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα για τις ιδιότητες απόκρισης του συστήματος κλειστού βρόχου για $0 < K_r < \infty$!

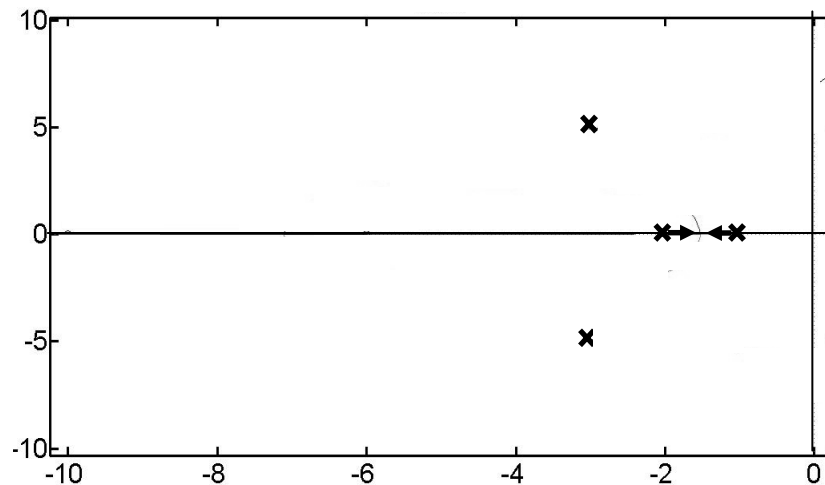
Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- i. Θέτουμε τους n πόλους του αυτοτελούς συστήματος

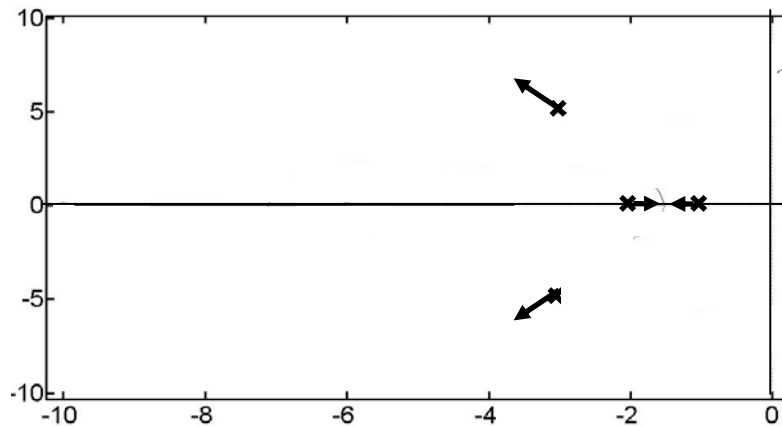
$$G(s) = P(s)/Q(s)$$

στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re και τους συμβολίζουμε με [X].



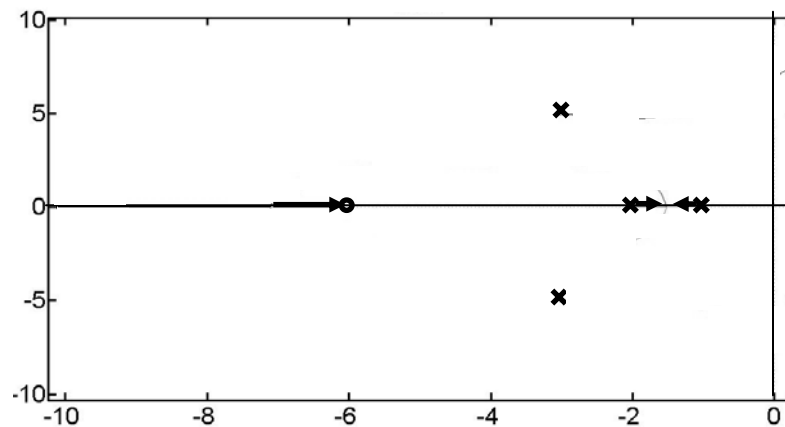
Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

Στις τοποθεσίες αυτές θα βρίσκονται οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου για $K_p=0$, και από εκεί θα ξεκινήσουν τις τροχιές τους με αυξανόμενη τιμή του K_p .



Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- ii. Θέτουμε τους m μηδενιστές του αυτοτελούς συστήματος $G(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re και τους συμβολίζουμε με (o).



Στις τοποθεσίες αυτές καταλήγουν m πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου για $K_p \rightarrow \infty$.

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- iii. Από τις τροχιές των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re, κάποιες ενδεχομένως να βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα.

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- iii. Από τις τροχιές των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re, κάποιες ενδεχομένως να βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα.
 - Ξεκινούμε από την πιο μεγάλη τιμή πραγματικού πόλου ή μηδενιστή, γενικά αναφερόμενου και ως «πρώτου τη τάξει».

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- iii. Από τις τροχιές των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re, κάποιες ενδεχομένως να βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα.
 - Ξεκινούμε από την πιο μεγάλη τιμή πραγματικού πόλου ή μηδενιστή, γενικά αναφερόμενου και ως «πρώτου τη τάξει».
 - Το διάστημα μεταξύ **πρώτου και δεύτερου τη τάξει αποτελεί** μέρος του τόπου των ριζών.

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

iii. Από τις τροχιές των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re, κάποιες ενδεχομένως να βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα.

- Ξεκινούμε από την πιο μεγάλη τιμή πραγματικού πόλου ή μηδενιστή, γενικά αναφερόμενου και ως «πρώτου τη τάξει».
- Το διάστημα μεταξύ **πρώτου και δεύτερου τη τάξει αποτελεί** μέρος του τόπου των ριζών.

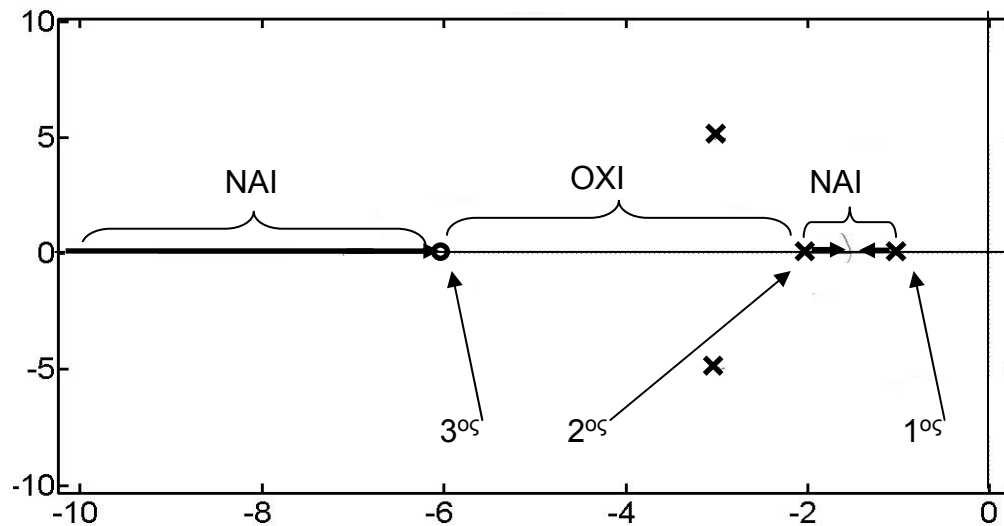
Το διάστημα μεταξύ **δεύτερου και τρίτου τη τάξει ΔΕΝ αποτελεί** μέρος του τόπου των ριζών.

Το διάστημα μεταξύ του **τρίτου και του τέταρτου τη τάξει αποτελεί** μέρος του τόπου των ριζών.

Κ.Ο.Κ

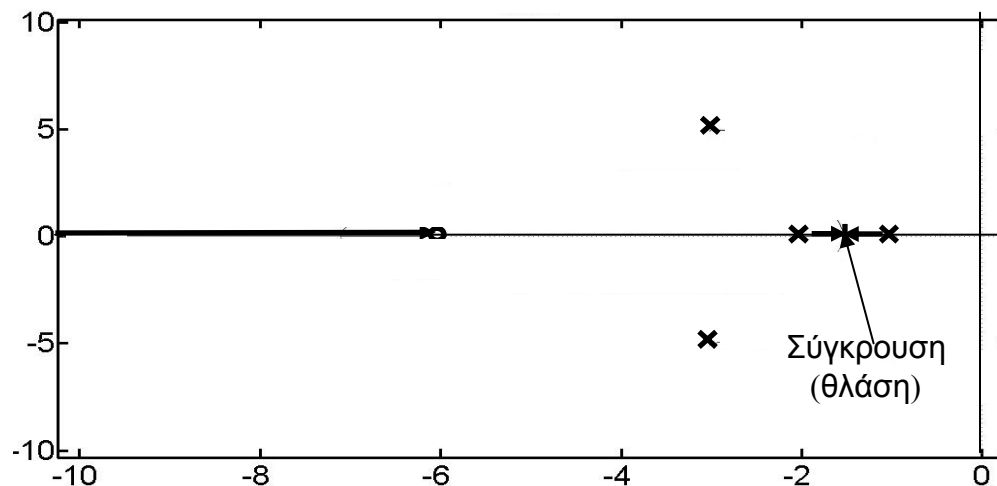
Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

Με πιο απλά λόγια η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re θα είναι ως εξής:



Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

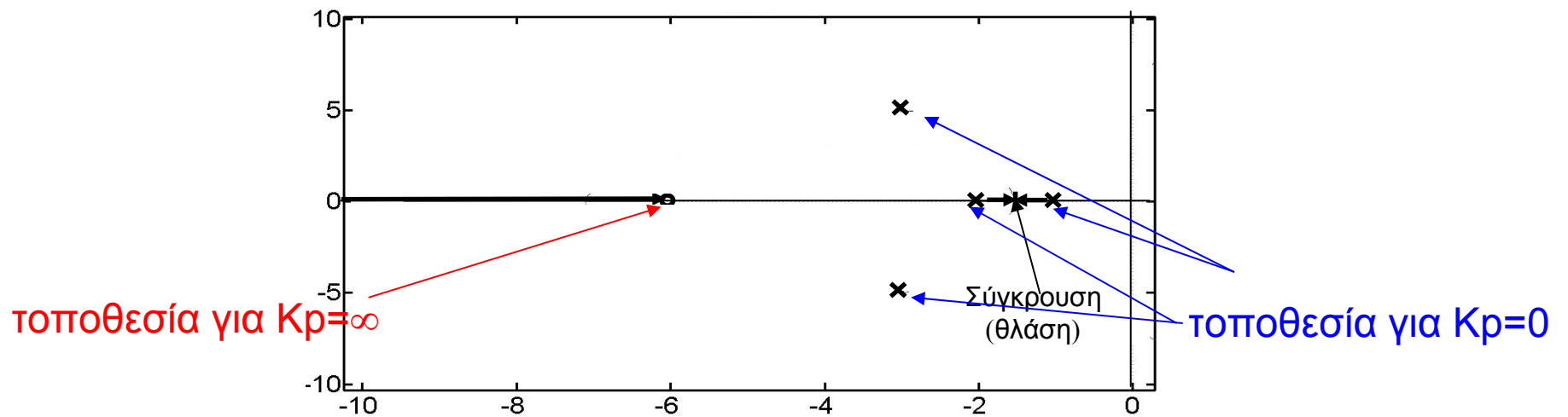
- iv. Αυξανόμενου του K_r , δύο πόλοι κινούμενοι στο Re -άξονα από αντίθετες πλευρές θα συγκρουστούν πριν διακλαδωθούν και συνεχίσουν τις τροχιές τους στο μιγαδικό επίπεδο Im-Re .



Το σημείο σύγκρουσης (ή θλάσης) αντιστοιχεί στις λύσεις της εξίσωσης $d/ds[G(s)]=0$.

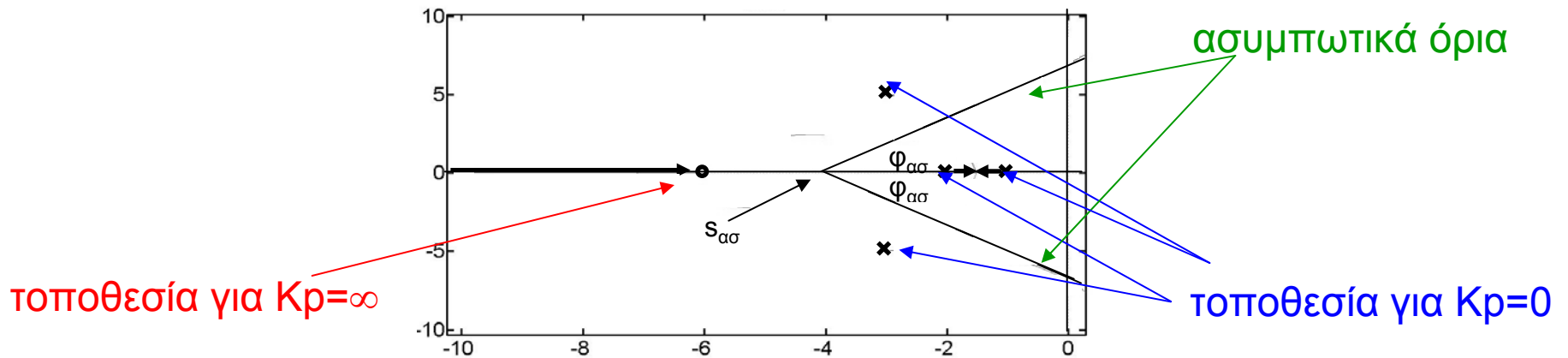
Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- v. Αυξανόμενου του K_r , m πόλοι κλειστού βρόχου καταλήγουν στις τοποθεσίες των **ισάριθμων μηδενιστών** z_1, \dots, z_m του $G(s)$,



Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- v. Αυξανόμενου του K_r , m πόλοι κλειστού βρόχου καταλήγουν στις τοποθεσίες των **ισάριθμων μηδενιστών** z_1, \dots, z_m του $G(s)$,



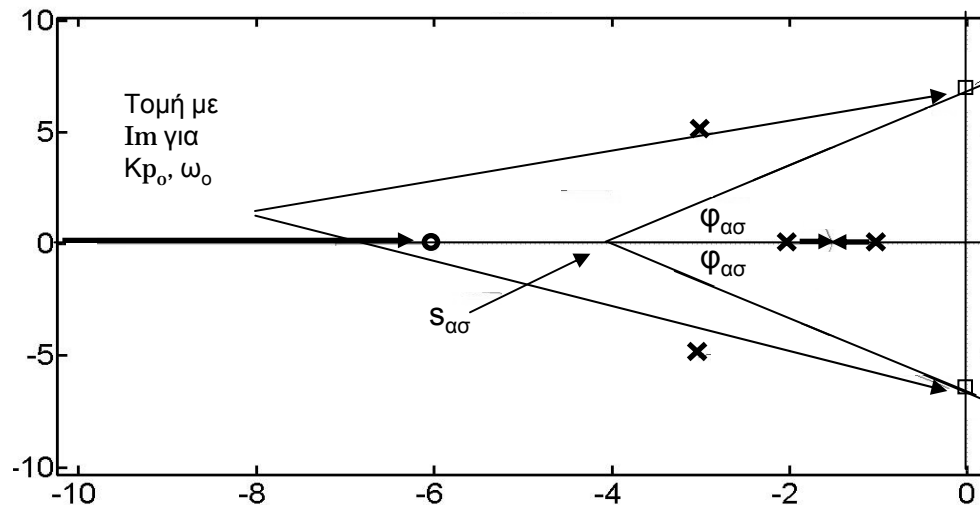
ενώ $(n-m)$ πόλοι κλειστού βρόχου οδηγούνται στο άπειρο **ασυμπτωτικά** με όριο ευθείες που ξεκινούν από σημεία του πραγματικού άξονα $s_{\alpha\sigma}$ και βρίσκονται υπό γωνία $\varphi_{\alpha\sigma}$ με αυτόν.

$$s_{\alpha\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \text{ και } \varphi_{\alpha\sigma} = \frac{(2 \cdot \lambda + 1)}{n - m} \cdot 180^\circ, \lambda = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

- vi. Τροχιές πόλων του τόπου των ριζών τέμνουν τον φανταστικό άξονα στις τοποθεσίες $\pm j\omega_0$ για τιμή $K\rho_0$ που επαληθεύουν την εξίσωση

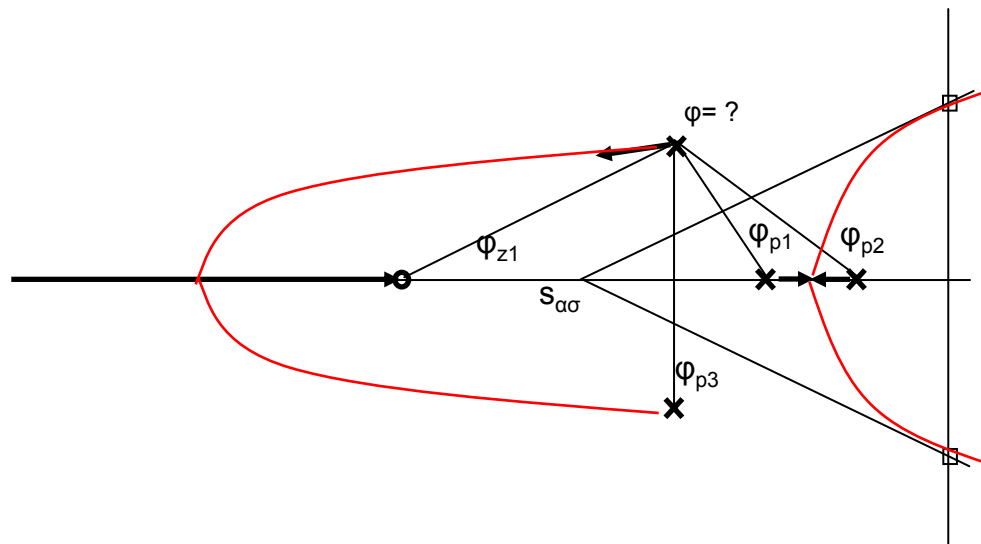
$$Q(j\omega_0) + K\rho_0 \cdot P(j\omega_0) = 0^*$$



* Σε αυτό το στάδιο γίνεται χρήση της εξίσωσης κλειστού βρόχου

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

vii. Τροχιά αναχώρησης από μιγαδικό πόλο (ή προσέγγισης σε μιγαδικό μηδενιστή) υπό γωνία φ ικανοποιεί το κριτήριο γωνίας για $\lambda=0,1,2,\dots$:



$$(\varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \dots + \varphi) - (\varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zm}) = (2 \cdot \lambda + 1) \cdot 180^\circ \text{ [αναχώρηση από μιγαδικό πόλο]}$$

$$(\varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \dots + \varphi_{pn}) - (\varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi) = (2 \cdot \lambda + 1) \cdot 180^\circ \text{ [προσέγγιση σε μιγαδικό μηδενιστή]}$$

Βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου ριζών συστήματος

viii. Ένα σημείο s του τόπου των ριζών αντιστοιχεί σε πόλο του κλειστού συστήματος με κέρδος Kp^* που ικανοποιεί το κριτήριο του μέτρου:

$$Kp^* = \frac{|s - p_1| \cdot |s - p_2| \cdot \dots \cdot |s - p_n|}{|s - z_1| \cdot |s - z_2| \cdot \dots \cdot |s - z_m|}$$

όπου $|s - p_i|$ (ή $|s - z_i|$) είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο s με τον πόλο p_i ή τον μηδενιστή z_i .

Αν δεν υπάρχουν μηδενιστές τότε:

$$Kp^* = |s - p_1| \cdot |s - p_2| \cdot \dots \cdot |s - p_n|$$

Τόπος ριζών

Παρατηρήσεις

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος του τόπου των ριζών χρησιμοποιεί πόλους και μηδενιστές του **αυτοτελούς ανοικτού συστήματος**.

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος του τόπου των ριζών χρησιμοποιεί πόλους και μηδενιστές του **αυτοτελούς ανοικτού συστήματος**.
- Η μέθοδος εξηγεί **ΠΡΟΚΑΤΑΒΟΛΙΚΑ** τι **ΘΑ** συμβεί όταν **ΘΑ** θέσουμε το σύστημα σε κλειστό βρόχο, χωρίς να μελετούμε τις εξισώσεις κλειστού βρόχου.

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος του τόπου των ριζών χρησιμοποιεί πόλους και μηδενιστές του **αυτοτελούς ανοικτού συστήματος**.
- Η μέθοδος εξηγεί **ΠΡΟΚΑΤΑΒΟΛΙΚΑ** τι **ΘΑ συμβεί** όταν **ΘΑ θέσουμε** το σύστημα σε κλειστό βρόχο, χωρίς να μελετούμε τις εξισώσεις κλειστού βρόχου.
- Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών απόδοσης κλειστού βρόχου (π.χ. κερδών) προκύπτει σχεδιαστικά οπότε και η ακρίβεια εξαρτάται από την αντίστοιχη χάραξη του τόπου ριζών.

Χάραξη τόπου ριζών συστήματος

Παράδειγμα

Παράδειγμα

Χάραξη του τύπου των ριζών του αυτοτελούς συστήματος $G(s)$ με συνάρτηση μεταφοράς όπως παρακάτω:

$$G(s) = \frac{s+5}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 6 \cdot s + 18)} \left(= \frac{s+5}{s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s} \right)$$

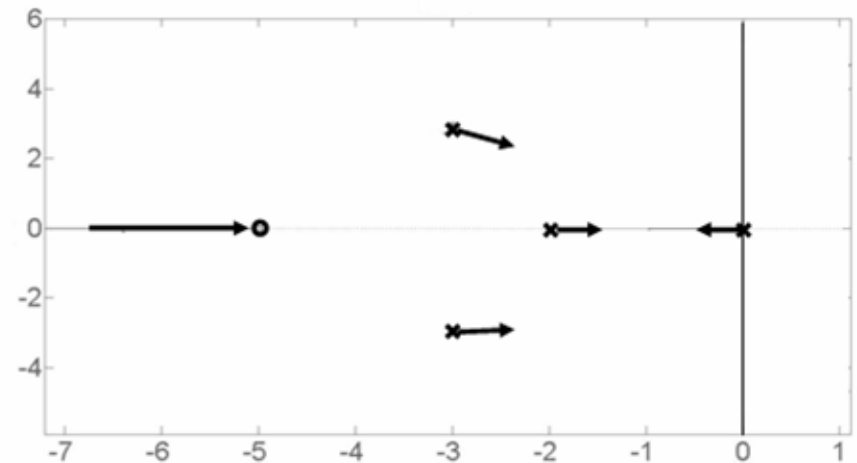
Παράδειγμα

Χάραξη του τόπου των ριζών του αυτοτελούς συστήματος $G(s)$ με συνάρτηση μεταφοράς όπως παρακάτω:

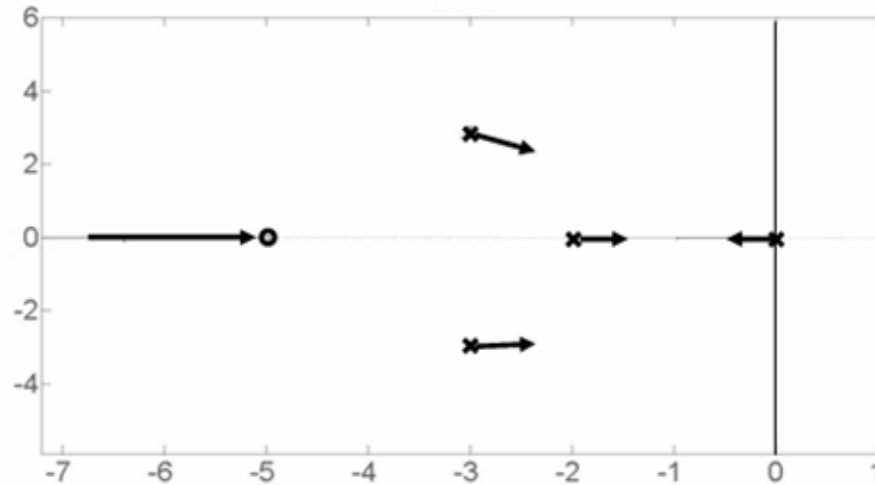
$$G(s) = \frac{s+5}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 6 \cdot s + 18)} \left(= \frac{s+5}{s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s} \right)$$

Λύση:

- Πόλοι: $n=4$, $p_1=0$, $p_2=-2$, $p_{3,4}=-3 \pm j \cdot 3$
- Μηδενιστές $m=1$, διότι $z_1=-5$.

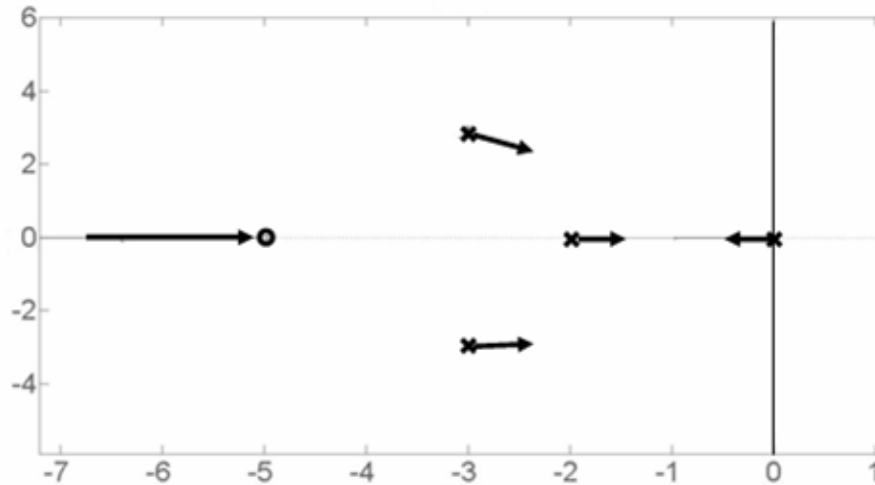


Παράδειγμα



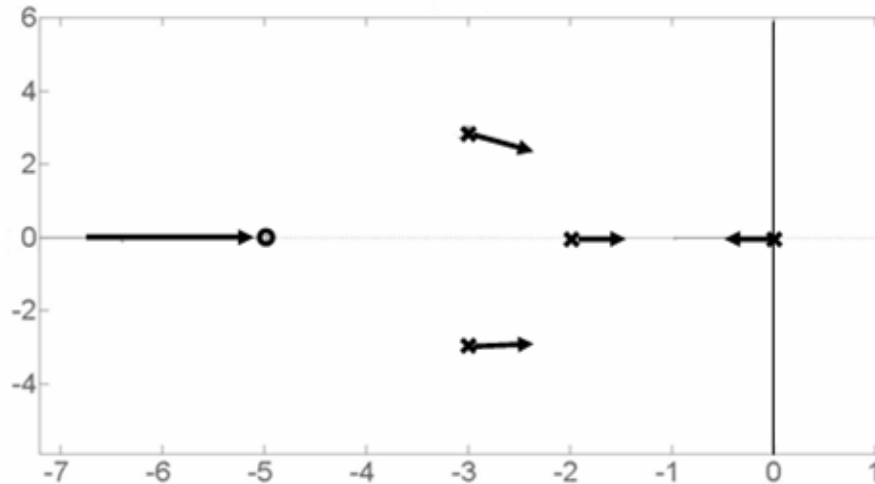
- Άρα δύο τροχιές ξεκινούν από τον $p_{3,4} = -3 \pm j \cdot 3$ και επίσης δύο από $p_1 = 0, p_2 = -2$.

Παράδειγμα



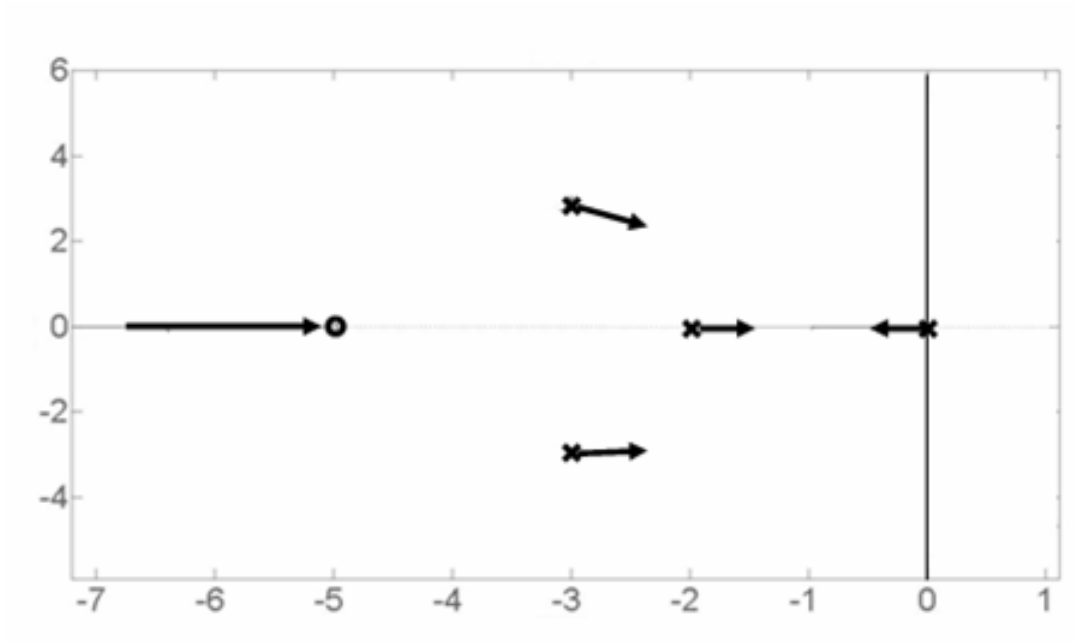
- Άρα δύο τροχιές ξεκινούν από τον $p_{3,4} = -3 \pm j \cdot 3$ και επίσης δύο από $p_1 = 0, p_2 = -2$.
- Μόνο μία τροχιά καταλήγει στο $z_1 = -5$ (δεν υπάρχουν άλλοι μηδενιστές!).

Παράδειγμα



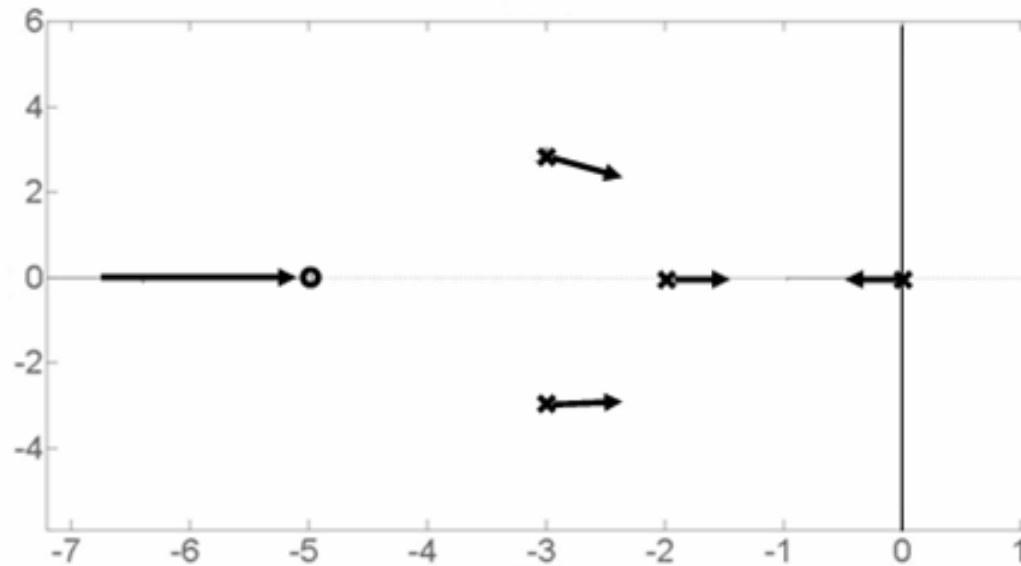
- Άρα δύο τροχιές ξεκινούν από τον $p_{3,4} = -3 \pm j \cdot 3$ και επίσης δύο από $p_1 = 0$, $p_2 = -2$.
- Μόνο μία τροχιά καταλήγει στο $z_1 = -5$ (δεν υπάρχουν άλλοι μηδενιστές!).
- Συνάγεται λοιπόν ότι οι άλλες τρεις τροχιές θα καταλήγουν στο άπειρο (βλ. παρακάτω).

Παράδειγμα



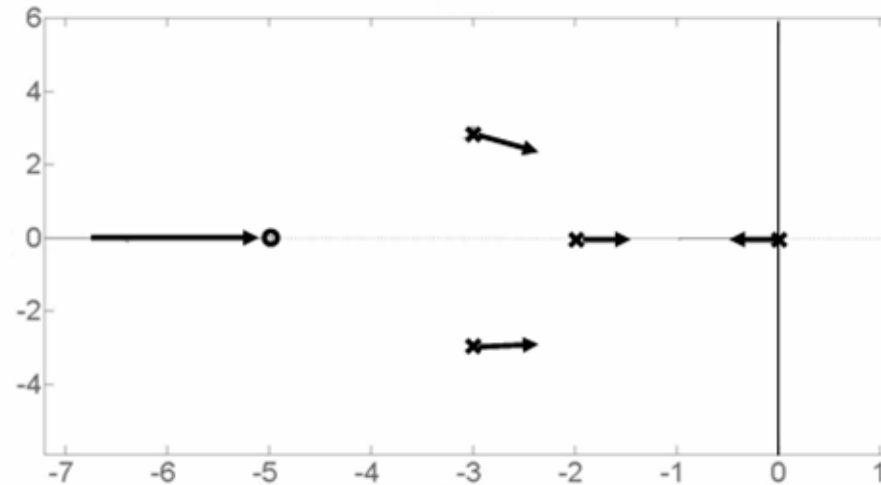
- Σημεία του τόπου ριζών στον πραγματικό άξονα:

Παράδειγμα



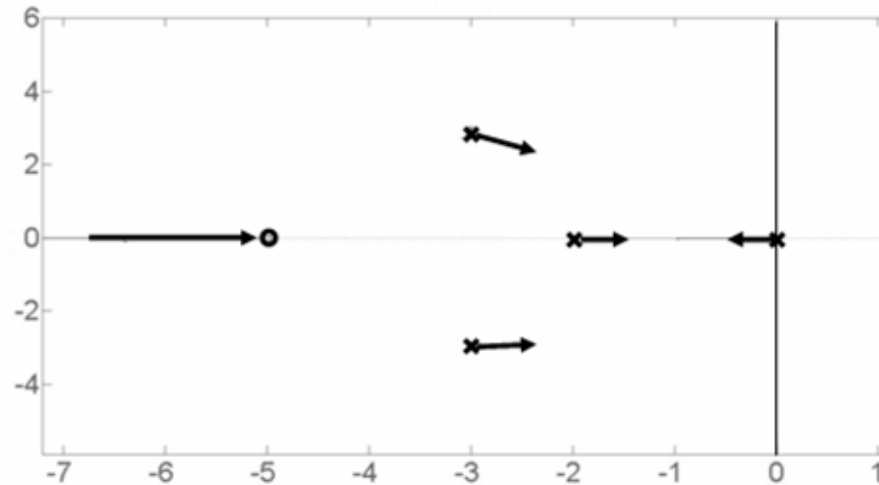
- Σημεία του τόπου ριζών στον πραγματικό άξονα:
Μεγαλύτερος πραγματικός πόλος/ μηδενιστής είναι ο $p_1=0$.
Άρα, $[0 \rightarrow -2]$ «είναι», $[-2 \rightarrow -5]$ «ΔΕΝ είναι», $[-5 \rightarrow -\infty]$ «είναι».

Παράδειγμα



- Προφανώς οι πόλοι από το -2 και το 0 θα κινηθούν ανταγωνιστικά και θα συγκρουστούν (θλάση) κάπου μεταξύ του 0 και -2 .

Παράδειγμα



- Προφανώς οι πόλοι από το -2 και το 0 θα κινηθούν ανταγωνιστικά και θα συγκρουστούν (θλάση) κάπου μεταξύ του 0 και -2.
- Το σημείο θλάσης θα δοθεί από τη λύση της εξίσωσης:

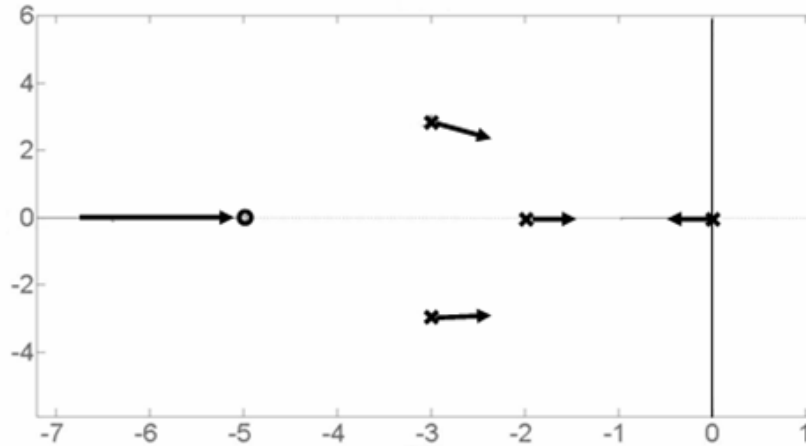
$$\frac{d}{ds}G(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \frac{s+5}{s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s} = \frac{-3 \cdot s^4 - 36 \cdot s^3 - 160 \cdot s^2 - 400 \cdot s - 180}{(s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s)^2} = 0$$

Παράδειγμα

$$\frac{d}{ds}G(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \frac{s+5}{s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s} = \frac{-3 \cdot s^4 - 36 \cdot s^3 - 160 \cdot s^2 - 400 \cdot s - 180}{(s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s)^2} = 0$$

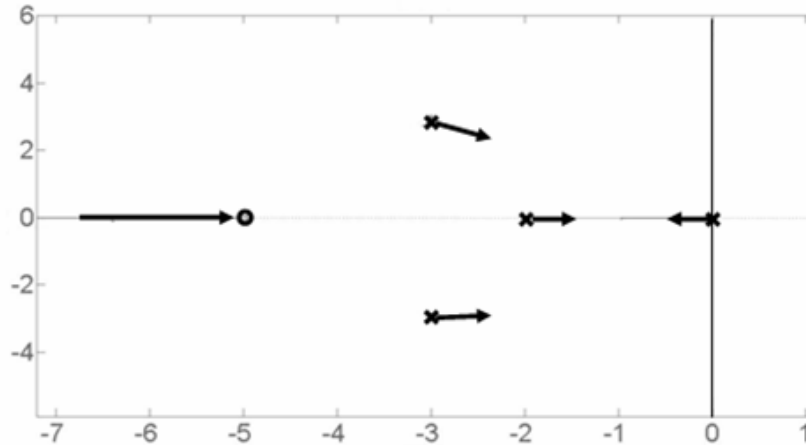
- Λαμβάνουμε $s_{\theta\lambda\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = -0.97$ και -6.4 (όπως και δύο μιγαδικές λύσεις οι οποίες όμως απορρίπτονται διότι δεν αντιστοιχούν σε σημεία του πραγματικού άξονα, όπου συμβαίνουν οι συγκρούσεις).
- Και οι δυο τιμές βρίσκονται στα διαστήματα που ανήκουν στο κομμάτι του τόπου των ριζών στον πραγματικό άξονα, άρα και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

Παράδειγμα



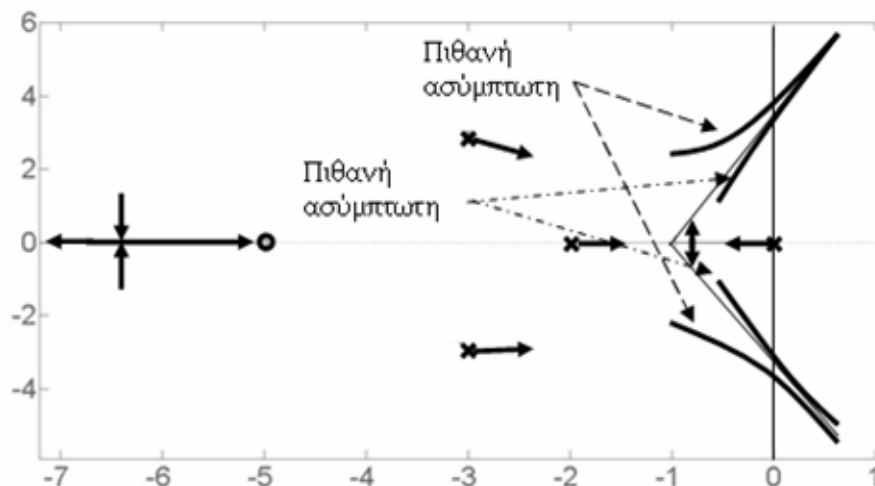
- Προφανώς η λύση $s_{\theta\lambda\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = -0.97$ αναφέρεται στη σύγκρουση τροχιών των πόλων 0 και -2, ενώ η άλλη τιμή σε σύγκρουση τροχιών που επανέρχονται στον πραγματικό άξονα από το επίπεδο Im-Re.

Παράδειγμα



- Προφανώς η λύση $s_{\theta\lambda\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = -0.97$ αναφέρεται στη σύγκρουση τροχιών των πόλων 0 και -2, ενώ η άλλη τιμή σε σύγκρουση τροχιών που επανέρχονται στον πραγματικό άξονα από το επίπεδο Im-Re.
- Πιθανότατα λοιπόν στο $s_{\theta\lambda\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = -6.4$ θα ξανασυναντηθούν οι τροχιές που ξεκίνησαν από τους μιγαδικούς πόλους $p_{3,4} = -3 \pm j \cdot 3$, ή οι τροχιές που συγκρούστηκαν πιο πριν στο $s_{\theta\lambda\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = -0.97$ (βλ. τις δύο πιθανές ασύμπτωτες παρακάτω)! Η απάντηση θα διευκρινιστεί λοιπόν με τη μελέτη των ασυμπτώτων παρακάτω

Παράδειγμα

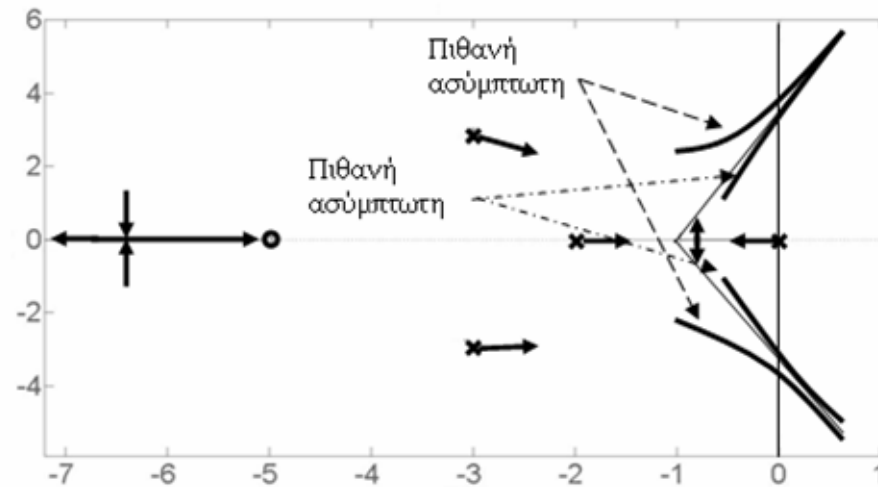


- Ασύμπτωτες θα υπάρχουν $(n-m)=3$, θα ξεκινούν από το σημείο του πραγματικού άξονα $s_{ασ}$ και θα βρίσκονται υπό γωνία $\varphi_{ασ}$ με αυτόν, όπως καθορίζεται ακολούθως:

$$s_{ασ} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{0-2-3 + 3 \cdot j-3-3 \cdot j-(-5)}{3} = -1$$

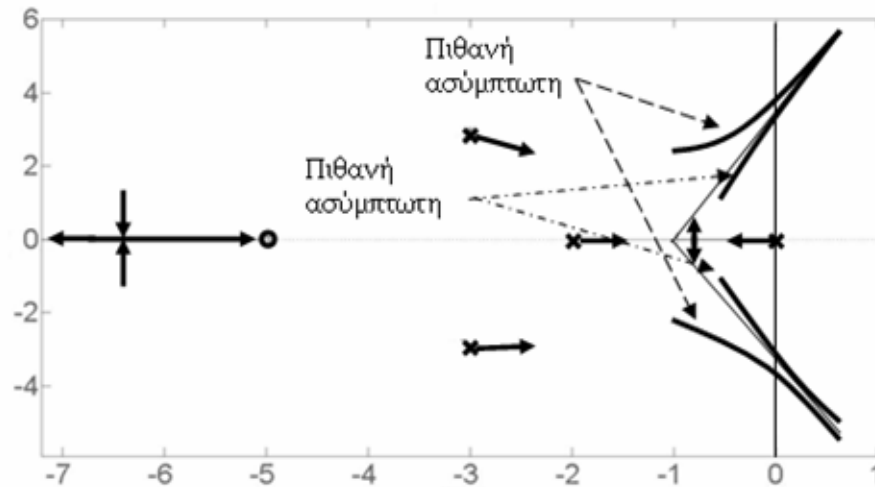
$$\varphi_{ασ} = \frac{(2 \cdot \lambda + 1)}{n - m} \cdot 180^\circ, \lambda = 0, 1, \dots, 2 \Rightarrow \varphi_{ασ} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

Παράδειγμα



- Σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα θα υπάρχουν, εφόσον δύο ασύμπτωτες φεύγουν υπό γωνίες 60 και 300 με κέντρο το -1, και πάνω σε αυτές τις ασύμπτωτες θα κινούνται κάποιες τροχιές (είτε αυτές που ξεκίνησαν από τους μιγαδικούς πόλους $p_{3,4} = -3 \pm j \cdot 3$, ή οι τροχιές που συγκρούστηκαν πιο πριν στο $s_{\thetaλάσης} = -0.97$).

Παράδειγμα



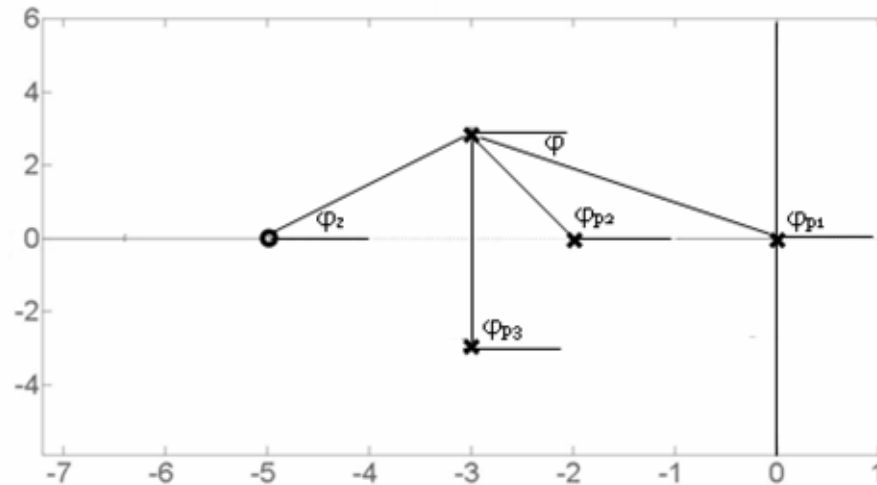
- Τα σημεία αυτά τομής $j \cdot \omega_0$ που υλοποιούνται για K_{p_0} θα βρεθούν θέτοντας $Q(j\omega_0) + K_{p_0} \cdot P(j\omega_0) = 0$, δηλαδή για την περίπτωση μας:

$$s^4 + 8 \cdot s^3 + 30 \cdot s^2 + 36 \cdot s + K_{p_0} \cdot (s + 5) \Big|_{s=j\omega_0} = 0 \Rightarrow$$

$$[\omega_0^4 - 30 \cdot \omega_0^2 + 5 \cdot K_{p_0}] + j \cdot [-8 \cdot \omega_0^3 + (36 + K_{p_0}) \cdot \omega_0] = 0$$

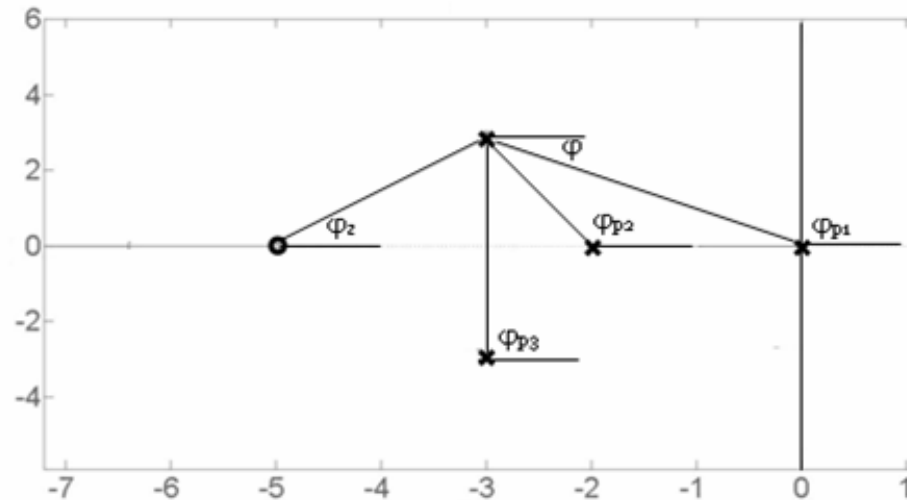
Οπότε και $\omega_0 = 3.06$ και $K_{p_0} = 38.51$.

Παράδειγμα



- Ποιες τροχιές φεύγουν στο άπειρο τέμνοντας το φανταστικό άξονα (των μιγαδικών πόλων ή των πραγματικών αφού συγκρουστούν στο -0.97;). Γωνίες εξόδου από τους μιγαδικούς πόλους!

Παράδειγμα (10)



- Γωνίες εξόδου από τους μιγαδικούς πόλους. Θα πρέπει να εφαρμόσουμε το κριτήριο γωνίας και να διαπιστώσουμε υπό ποια γωνία οι μιγαδικοί πόλοι διαγράφουν τις τροχιές τους.

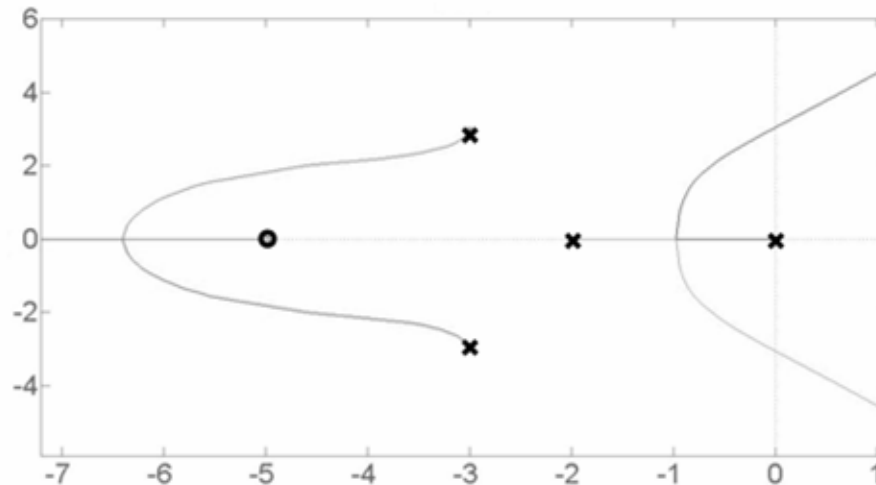
Με φ συμβολίζουμε την άγνωστη γωνία, και μετρούμε το μέγεθός της από τον οριζόντιο άξονα με θετική φορά την ανθρωρολογιακή

$$\varphi_{p1} = 90 + \text{Tan}^{-1} \frac{3}{3} = 135, \varphi_{p2} = 180 - \text{Tan}^{-1} \frac{3}{1} = 108, \varphi_{p3} = 90, \varphi_z = \text{Tan}^{-1} \frac{3}{2} = 56$$

και $\varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \varphi_{p3} + \varphi - \varphi_z = 180 \Rightarrow \varphi = -97$

Παράδειγμα

- Η τροχιά του πόλου είναι προς τα κάτω και αριστερά!
- Έτσι η σύγκρουση στο -6.4 θα αφορά τροχιές που ξεκίνησαν από τους μιγαδικούς πόλους $p_{3,4} = -3 \pm j \cdot 3$, οπότε και οι τροχιές που φεύγουν κατά μήκος των ασυμπτώτων προέρχονται από τους πραγματικούς πόλους που συγκρούστηκαν στο -0.97 .
- Ο ολοκληρωμένος τόπος των ριζών δίδεται λοιπόν ως:



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

