



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τ.Τ



Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 2

Ενότητα #7: Αρμονικά κριτήρια ευστάθειας κατά Nyquist
και BODE

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σκοποί ενότητας

- Υπενθύμιση αρμονικών αποκρίσεων συστήματος.
- Αναπαράσταση αρμονικών αποκρίσεων ανοικτού συστήματος σε διάγραμμα Nyquist – σύνδεση με BODE
- Εξακρίβωση ευστάθειας κλειστού βρόχου με χρήση διαγράμματος Nyquist ανοικτού βρόχου.

Περιεχόμενα ενότητας

- Απόκριση συστήματος σε αρμονική είσοδο
- Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς
- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης συστήματος σε διάγραμμα Nyquist

Περιεχόμενα ενότητας

- Παράδειγμα 1 – Παρατηρήσεις
- Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist
- Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

Περιεχόμενα ενότητας

- Παράδειγμα 2
- Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist
- Γραφική ερμηνεία

Περιεχόμενα ενότητας

- Συμπέρασμα
- Παράδειγμα 3

Απόκριση συστήματος σε αρμονική είσοδο

Απόκριση συστήματος σε αρμονική είσοδο

- Αν οδηγήσουμε σύστημα συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ με ημιτονοειδή είσοδο $u(t)=U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\{U_0$: πλάτος εισόδου, ω : κυκλ. συχνότητα r/s},



Σχ.1: Σύστημα τροφοδοτούμενο με ημιτονοειδή είσοδο και απόκριση αυτού.

Απόκριση συστήματος σε αρμονική είσοδο

- Αν οδηγήσουμε σύστημα συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ με ημιτονοειδή είσοδο $u(t)=U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\{U_0$: πλάτος εισόδου, ω : κυκλ. συχνότητα r/s},



Σχ.1: Σύστημα τροφοδοτούμενο με ημιτονοειδή είσοδο και απόκριση αυτού.

αποκρίνεται με σήμα εξόδου $y(t)=Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$,

$\{ Y_0$: πλάτος της εξόδου και φ η (γωνία) διαφοράς φάσης (Σχ. 1)}.

Απόκριση συστήματος σε αρμονική είσοδο

- Αν οδηγήσουμε σύστημα συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ με ημιτονοειδή είσοδο $u(t)=U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\{U_0$: πλάτος εισόδου, ω : κυκλ. συχνότητα r/s},



Σχ.1: Σύστημα τροφοδοτούμενο με ημιτονοειδή είσοδο και απόκριση αυτού.

αποκρίνεται με σήμα εξόδου $y(t)=Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$,

$\{ Y_0$: πλάτος της εξόδου και φ η (γωνία) διαφοράς φάσης (Σχ. 1)}.

Υπενθυμίζεται ότι τόσο το Y_0 , όσο και το φ εξαρτώνται από το μέγεθος της κυκλικής συχνότητας διέγερσης ω .

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

- Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + b_{m-2} \cdot s^{m-2} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (1)$$

- Με άλλα λόγια, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + a_{n-2} \cdot \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} y(t) + \dots + a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ b_m \cdot \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_1 \cdot \frac{d}{dt} u(t) + b_0 \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

- Με άλλα λόγια, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + a_{n-2} \cdot \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} y(t) + \dots + a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ b_m \cdot \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_1 \cdot \frac{d}{dt} u(t) + b_0 \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

- Εφόσον

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \quad (\text{σχέση του Euler})$$

συμβολίζουμε το σήμα

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \omega\varsigma \quad U(j\omega) = U_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)}$$

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

- Εφόσον

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \quad (\text{σχέση του Euler})$$

συμβολίζουμε το σήμα

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{ως} \quad U(j\omega) = U_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)}.$$

- Άρα το $u(t)$ αντιστοιχεί στο φανταστικό κομμάτι του

$$U(j\omega) = U_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)} = U_0 \cdot [\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)].$$

- Αντίστοιχα για το σήμα εξόδου $y(t) = Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$,

$$Y(j\omega) = Y_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}.$$

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

Έστω ότι $U_0=1$. Προφανώς:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= Y_0 \cdot \frac{d}{dt} e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = j\omega \cdot Y_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = j\omega \cdot Y(j\omega) \\ \frac{d^n}{dt^n} y(t) &= Y_0 \cdot \frac{d^n}{dt^n} e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = (j\omega)^n \cdot Y_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = (j\omega)^n \cdot Y(j\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

με αντίστοιχα αποτελέσματα να λαμβάνονται και για το σήμα $u(t)$.

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

Έστω ότι $U_0=1$. Προφανώς:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} y(t) &= Y_0 \cdot \frac{d}{dt} e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = j\omega \cdot Y_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = j\omega \cdot Y(j\omega) \\ &\vdots \\ \frac{d^n}{dt^n} y(t) &= Y_0 \cdot \frac{d^n}{dt^n} e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = (j\omega)^n \cdot Y_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = (j\omega)^n \cdot Y(j\omega)\end{aligned}\tag{3}$$

με αντίστοιχα αποτελέσματα να λαμβάνονται και για το σήμα $u(t)$.

Αντικαθιστώντας όσα φαίνονται στις σχέσεις (3) στην διαφορική εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}[(j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega)^1 + a_0 \cdot (j\omega)^0] \cdot Y(j\omega) = \\ [b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega)^1 + b_0 \cdot (j\omega)^0] \cdot U(j\omega)\end{aligned}\tag{4}$$

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{aligned} & [(j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega)^1 + a_0 \cdot (j\omega)^0] \cdot Y(j\omega) = \\ & [b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega)^1 + b_0 \cdot (j\omega)^0] \cdot U(j\omega) \end{aligned} \quad (4)$$

ή τελικά:

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + b_{m-2} \cdot (j\omega)^{m-2} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = G(j\omega) \quad (5)$$

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{aligned} & [(j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega)^1 + a_0 \cdot (j\omega)^0] \cdot Y(j\omega) = \\ & [b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega)^1 + b_0 \cdot (j\omega)^0] \cdot U(j\omega) \end{aligned} \quad (4)$$

ή τελικά:

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + b_{m-2} \cdot (j\omega)^{m-2} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = G(j\omega) \quad (5)$$

Όμως: $Y(j\omega)/U(j\omega) = Y_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi - \omega \cdot t)} = Y_0 \cdot e^{j\varphi}$, άρα μέσω της (5)

$$G(j\omega) = Y_0 \cdot e^{j\varphi} = |G(j\omega)| \cdot \angle G(j\omega) \quad (6)$$

η οποία ονομάζεται και **αρμονική συνάρτηση μεταφοράς**

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + b_{m-2} \cdot (j\omega)^{m-2} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = G(j\omega) \quad (5)$$

$$G(j\omega) = Y_0 \cdot e^{j\varphi} = |G(j\omega)| \cdot \angle G(j\omega) \quad (6)$$

- Από (6): αν συχνότητα διέγερσης ω ,

τότε

μέτρο και φάση αρμονικής συνάρτησης μεταφοράς είναι το $|G(j\omega)| = |Y_0|$ και η φάση του μιγαδικού αριθμού $G(j\omega)$.

- Αν $U_0 \neq 1$, $|G(j\omega)| = |Y_0| / |U_0|$.
- Η σχέση εισόδου- εξόδου συστήματος οδηγούμενου με ημιτονοειδή είσοδο περιγράφεται από την $G(j\omega)$, δηλαδή από τη $G(s)$ για $s = j\omega$.

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

- Αν z_1, \dots, z_m p_1, \dots, p_n οι μηδενιστές και οι πόλοι, αντίστοιχα, της $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} \quad (7)$$

οπότε και η αρμονική συνάρτηση μεταφοράς για τη συχνότητα διέγερσης ω θα έχει ως εξής:

$$G(j\omega) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{(j\omega - z_1) \cdot \dots \cdot (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n)} \quad (8)$$

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

$$G(j\omega) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{(j\omega - z_1) \cdot \dots \cdot (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n)} \quad (8)$$

- Σε κάθε $(j\omega - z_i)$ ή $(j\omega - p_i)$ αντιστοιχεί προφανώς για τη συγκεκριμένη συχνότητα διέγερσης ω
 - μέτρο $M_{z_i} = \sqrt{(\omega^2 + z_i^2)}$ [ή, αντίστοιχα, $M_{p_i} = \sqrt{(\omega^2 + p_i^2)}$]
- και
- φάση $\varphi_{z_i} = \text{Tan}^{-1}(\omega/z_i)$ [ή $\varphi_{p_i} = \text{Tan}^{-1}(\omega/p_i)$], ,

Υπενθύμιση: Αρμονική συνάρτηση μεταφοράς

- Σε κάθε $(j\omega - z_i)$ ή $(j\omega - p_i)$ αντιστοιχεί προφανώς για τη συγκεκριμένη συχνότητα διέγερσης ω

- μέτρο $M_{z_i} = \sqrt{(\omega^2 + z_i^2)}$ [ή, αντίστοιχα, $M_{p_i} = \sqrt{(\omega^2 + p_i^2)}$]

και

- φάση $\varphi_{z_i} = \text{Tan}^{-1}(\omega/z_i)$ [ή $\varphi_{p_i} = \text{Tan}^{-1}(\omega/p_i)$], ,

- Τότε αφού $(j\omega - z_i) = M_{z_i} \cdot e^{j(\varphi_{z_i})}$ ή $(j\omega - p_i) = M_{p_i} \cdot e^{j(\varphi_{p_i})}$, το μέτρο και η φάση του $G(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \varphi_K + \varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zm} - \varphi_{p1} - \varphi_{p2} - \dots - \varphi_{pn} \\ M(\omega) &= \frac{M_K \cdot M_{z1} \cdot M_{z2} \cdot \dots \cdot M_{zm}}{M_{p1} \cdot M_{p2} \cdot \dots \cdot M_{pn}} \end{aligned} \quad (9)$$

Αναπαράσταση μέτρου - φάσης συστήματος σε διάγραμμα Nyquist

Αναπαράσταση μέτρου - φάσης συστήματος σε διάγραμμα Nyquist

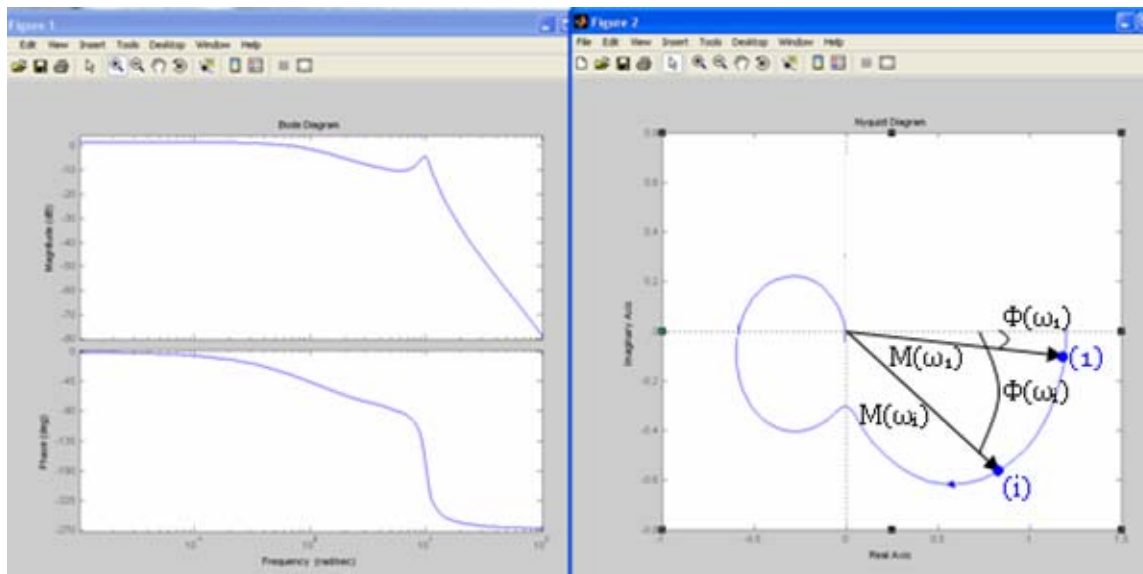
Η αναπαράσταση του μέτρου και της φάσης του $G(j\omega)$ για κάθε συχνότητα διέγερσης ω σε ένα διάγραμμα Nyquist γίνεται ως εξής:

- Θεωρούμε συχνότητες $\omega_1, \dots, \omega_r$, με $\omega_1 \rightarrow 0$ και $\omega_r \rightarrow \infty$,
- Βρίσκουμε τα σημεία $[M(\omega_1), \Phi(\omega_1)], [M(\omega_2), \Phi(\omega_2)], \dots, [M(\omega_r), \Phi(\omega_r)]$, στο διάγραμμα μέτρου-φάσης με πιθανή χρήση της (9)
- Ενώνουμε τα παραπάνω σημεία σχεδιάζοντας έτσι το διάγραμμα Nyquist του εξεταζόμενου συστήματος.

Παράδειγμα - Παρατηρήσεις

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση $G(s)=120/(s^3+3\cdot s^2+102\cdot s+100)$.



Σχ. 2: Κατασκευή ενός διαγράμματος Nyquist και παράθεση του αντίστοιχου BODE

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε: Συχνότητες $\omega_1, \dots, \omega_r$, με ω_1 μικρή και ω_r πολύ μεγάλη.

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε: Συχνότητες $\omega_1, \dots, \omega_r$, με ω_1 μικρή και ω_r πολύ μεγάλη.
- Παρατηρήσατε την τοποθέτηση του σημείου (1) που αντιστοιχεί στο $[M(\omega_1), \Phi(\omega_1)]$ στο επίπεδο μέτρου-φάσης.

Το $M(\omega_1)$ μετράται πάνω στο βέλος που ξεκινά από το σημείο $(0,0)$, ενώ η γωνία φάσης $\Phi(\omega_1)$ μετράται από τον οριζόντιο ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε: Συχνότητες $\omega_1, \dots, \omega_r$, με ω_1 μικρή και ω_r πολύ μεγάλη.
- Παρατηρήσατε την τοποθέτηση του σημείου (1) που αντιστοιχεί στο $[M(\omega_1), \Phi(\omega_1)]$ στο επίπεδο μέτρου-φάσης.

Το $M(\omega_1)$ μετράται πάνω στο βέλος που ξεκινά από το σημείο $(0,0)$, ενώ η γωνία φάσης $\Phi(\omega_1)$ μετράται από τον οριζόντιο ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.

- Άλλο σημείο (i): Το $M(\omega_i)$ αντιστοιχεί στην απόσταση πάνω στο βέλος που ξεκινά από το $(0,0)$ και σε γωνία φάσης πάλι από τον οριζόντιο ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε: Συχνότητες $\omega_1, \dots, \omega_r$, με ω_1 μικρή και ω_r πολύ μεγάλη.
- Παρατηρήσατε την τοποθέτηση του σημείου (1) που αντιστοιχεί στο $[M(\omega_1), \Phi(\omega_1)]$ στο επίπεδο μέτρου-φάσης.

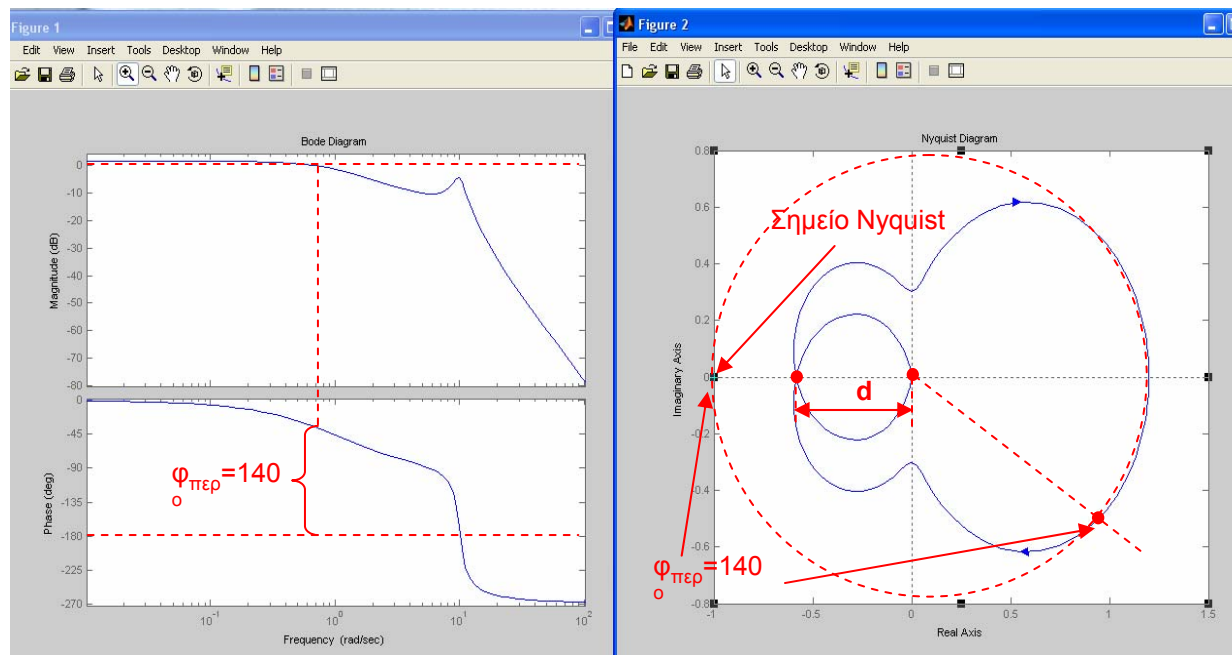
Το $M(\omega_1)$ μετράται πάνω στο βέλος που ξεκινά από το σημείο $(0,0)$, ενώ η γωνία φάσης $\Phi(\omega_1)$ μετράται από τον οριζόντιο ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.

- Άλλο σημείο (i): Το $M(\omega_i)$ αντιστοιχεί στην απόσταση πάνω στο βέλος που ξεκινά από το $(0,0)$ και σε γωνία φάσης πάλι από τον οριζόντιο ημιάξονα των πραγματικών αριθμών.
- Ενώνοντας όλα αυτά τα υποψήφια σημεία έχουμε το διάγραμμα. Στο Σχ. 2 δίδεται το διάγραμμα BODE της $G(s)$ για σύγκριση.

Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist

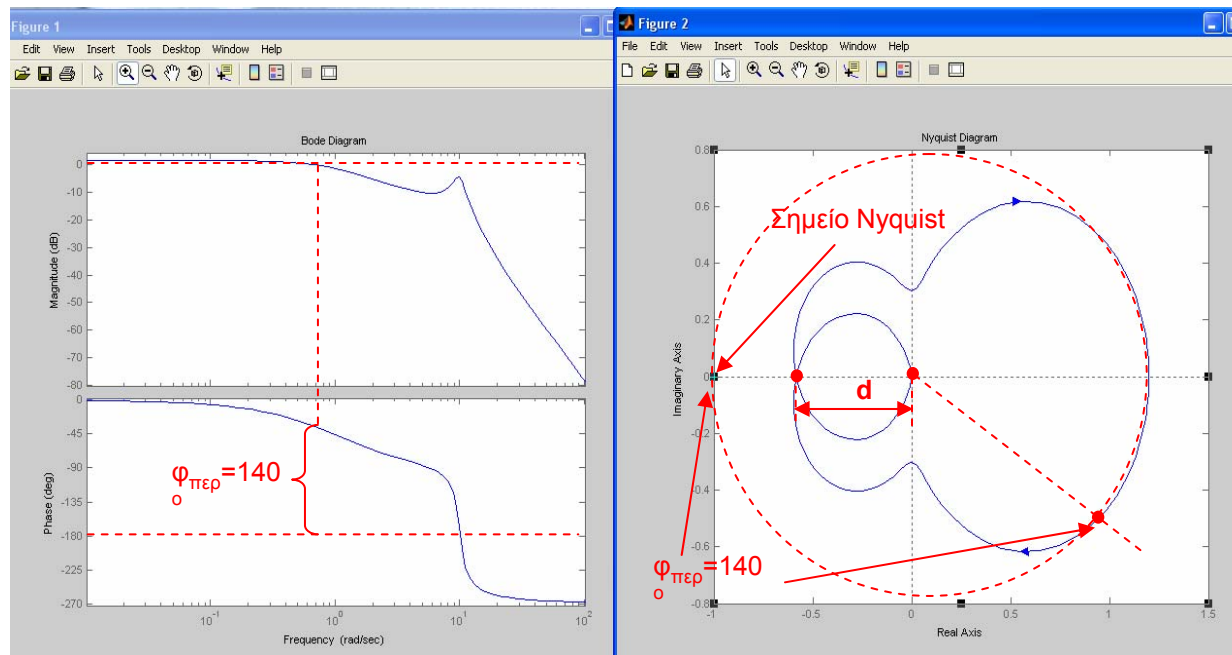
Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist

- Βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη σε διάγραμμα Nyquist (Σχ. 3):



Σχ. 3: Βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη ενός διαγράμματος Nyquist και παράθεση αυτών στο αντίστοιχο διάγραμμα BODE.

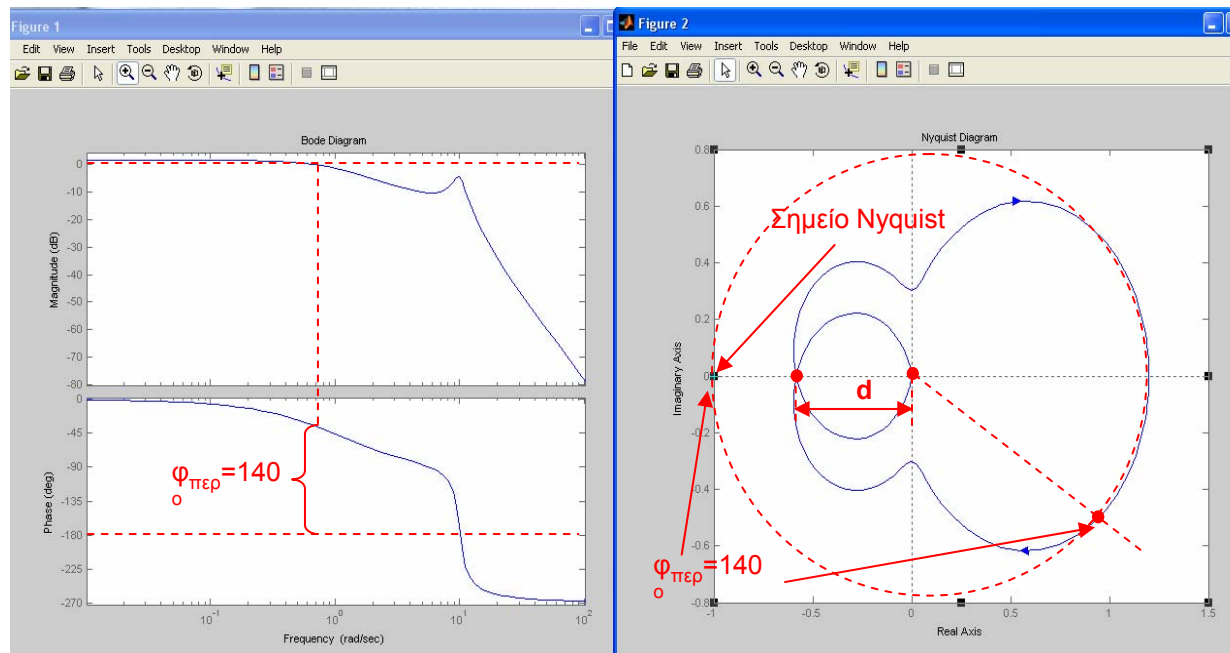
Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist



Σχ. 3: Βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη ενός διαγράμματος Nyquist και παράθεση αυτών στο αντίστοιχο διάγραμμα BODE.

- Το σημείο $(-1+0\cdot j)$ ονομάζεται σημείο Nyquist.

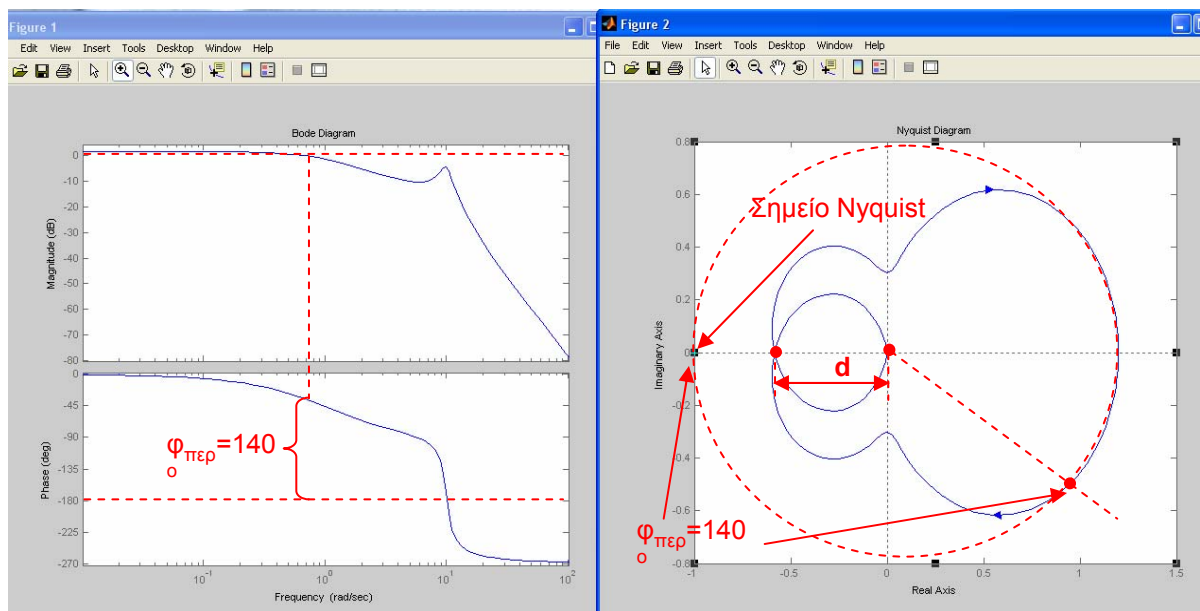
Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist



Σχ. 3: Βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη ενός διαγράμματος Nyquist και παράθεση αυτών στο αντίστοιχο διάγραμμα BODE.

- Το σημείο τομής της καμπύλης του διαγράμματος με τον οριζόντιο άξονα (στο Σχ. 3 απέχει απόσταση d από την αρχή των αξόνων) αντιστοιχεί στην κρίσιμη συχνότητα φάσης (crossover frequency).

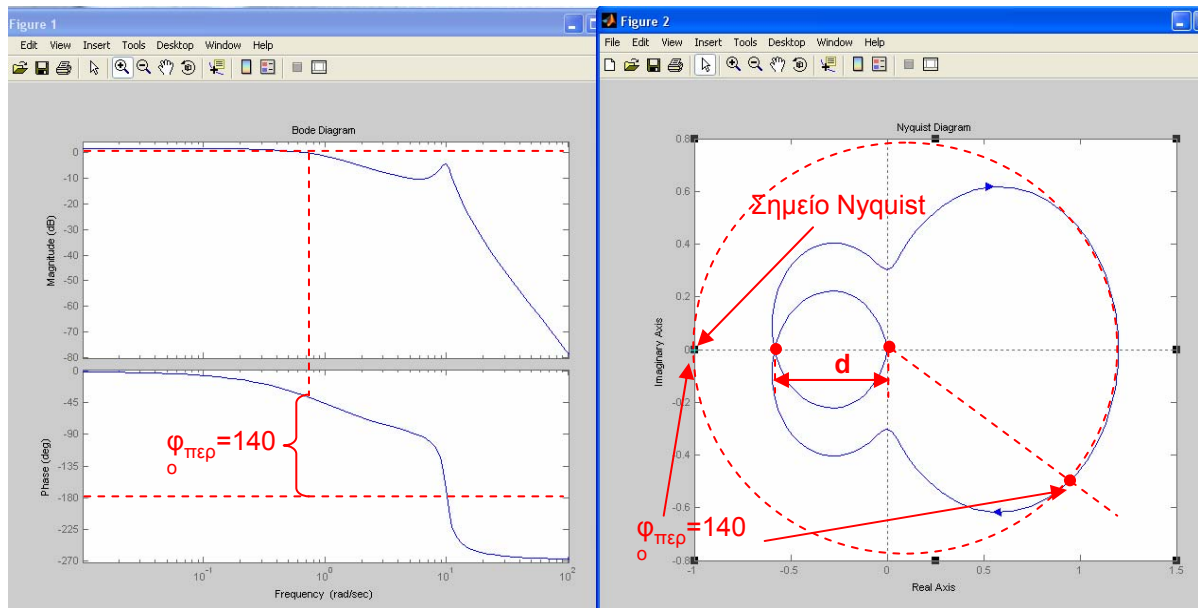
Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist



Σχ. 3: Βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη ενός διαγράμματος Nyquist και παράθεση αυτών στο αντίστοιχο διάγραμμα BODE.

- Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των -180 μοιρών και του σημείο τομής της καμπύλης με κύκλο με μοναδιαία ακτίνα και κέντρο στο $(0,0)$ είναι το περιθώριο φάσης $\varphi_{\text{περ}}$. (στο Σχ. 3 ~ 140 μοίρες).

Χαρακτηριστικά μεγέθη διαγράμματος Nyquist



Σχ. 3: Βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη ενός διαγράμματος Nyquist και παράθεση αυτών στο αντίστοιχο διάγραμμα BODE.

- Τα χαρακτηριστικά αυτά θα χρησιμοποιηθούν μελλοντικά για την εκτίμηση ευστάθειας του $G(s)$ σε κλειστό βρόχο με ανάλογο έλεγχο.

Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

- Ως ολική διαφορά φάσης $\Delta\Phi$ σε ένα διάγραμμα Nyquist ορίζεται το **αποτέλεσμα της φάσης του $G(j\omega)$ για «πολύ μεγάλο» ω μείον την φάση του $G(j\omega)$ για «σχεδόν μηδενικό» ω** , ή αλλιώς:

$$\Delta\Phi = \Phi(\omega)|_{\infty} - \Phi(\omega)|_0 \quad (10)$$

- Ο υπολογισμός της ολικής διαφοράς φάσης βασίζεται στην εξέταση των αντιστοίχων διαφορών φάσης των στοιχειωδών όρων (δηλαδή μηδενιστών και πόλων) κατά τα πρότυπα της (9).

Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

- Οι ολικές διαφορές φάσεις για τους στοιχειώδεις αυτούς παράγοντες θα είναι:

Ευσταθής πόλος p_e /μηδενιστής z_e

$$\Delta\Phi_{p_e} = \Phi(\omega)_{p_e}|_{\infty} - \Phi(\omega)_{p_e}|_0 = \pi/2 - 0 = \pi/2$$

(όμοια και για $\Delta\Phi_{z_e}$)

Ουδέτερος πόλος p_o /μηδενιστής z_o

$$\Delta\Phi_{p_o} = \Phi(\omega)_{p_o}|_{\infty} - \Phi(\omega)_{p_o}|_0 = \pi/2 - \pi/2 = 0$$

(δηλαδή ίσος με το μηδέν)

(όμοια και για $\Delta\Phi_{z_o}$)

Ασταθής πόλος p_a /μηδενιστής z_a

$$\Delta\Phi_{p_a} = \Phi(\omega)_{p_a}|_{\infty} - \Phi(\omega)_{p_a}|_0 = \pi/2 - \pi = -\pi/2$$

(όμοια και για $\Delta\Phi_{z_a}$)

- Παρατηρήσατε ότι χρησιμοποιούνται οι απόλυτες τιμές για τις αρχικές και τελικές φάσεις κάθε κατηγορίας πόλου ή μηδενιστή.

Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

- Αν μια συνάρτηση μεταφοράς έχει:
 - m μηδενιστές, n πόλους,
 - m_0 «ουδέτερους» μηδενιστές, n_0 ουδέτερους πόλους,
 - m_a «ασταθείς» μηδενιστές και n_a ασταθείς πόλους,
 - m_e «ευσταθείς» μηδενιστές και n_e ευσταθείς πόλους

Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

- Αν μια συνάρτηση μεταφοράς έχει:
 - m μηδενιστές, n πόλους,
 - m_0 «ουδέτερους» μηδενιστές, n_0 ουδέτερους πόλους,
 - m_a «ασταθείς» μηδενιστές και n_a ασταθείς πόλους,
 - m_e «ευσταθείς» μηδενιστές και n_e ευσταθείς πόλους

τότε

από (9), (10) η ολική διαφορά φάσης $\Delta\Phi$ της $G(j\omega)$ θα έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Delta\varphi_{z1} + \Delta\varphi_{z2} + \dots + \Delta\varphi_{zm} - \Delta\varphi_{p1} - \Delta\varphi_{p2} - \dots - \Delta\varphi_{pn} = \\ &= m_e \cdot (\pi/2) + m_0 \cdot 0 + m_a \cdot (-\pi/2) - n_e \cdot (\pi/2) - n_0 \cdot 0 - n_a \cdot (-\pi/2) = \\ &= [(m_e - m_a) - (n_e - n_a)] \cdot (\pi/2)\end{aligned}\tag{11}$$

Ολική διαφορά φάσης διαγράμματος Nyquist

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Delta\varphi_{z1} + \Delta\varphi_{z2} + \dots + \Delta\varphi_{zm} - \Delta\varphi_{p1} - \Delta\varphi_{p2} - \dots - \Delta\varphi_{pn} = \\ &= m\varepsilon \cdot (\pi/2) + m_0 \cdot 0 + m\alpha \cdot (-\pi/2) - n\varepsilon \cdot (\pi/2) - n_0 \cdot 0 - n\alpha \cdot (-\pi/2) = \\ &= [(m\varepsilon - m\alpha) - (n\varepsilon - n\alpha)] \cdot (\pi/2)\end{aligned}\quad (11)$$

και αφού

$$n = n\alpha + n_0 + n\varepsilon \quad \text{και} \quad m = m\alpha + m_0 + m\varepsilon,$$

η (11) θα μας οδηγήσει στο ακόλουθο:

$$\Delta\Phi = \Phi(\omega) \Big|_{\infty} - \Phi(\omega) \Big|_0 = [(m-n) - (m_0 - n_0) - 2 \cdot (m\alpha - n\alpha)] \cdot (\pi/2) \quad (12)$$

Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2

Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=30/[(s+2)\cdot(s+4)\cdot(s+6)]$.

- Έχουμε 3 ευσταθείς πόλους μόνο. Μέσω της (12) θα έχουμε ολική διαφορά φάσης του $G(s)$ (ή καλύτερα του $G(j\omega)$):

$$\Delta\Phi = \Phi(\omega)|_{\infty} - \Phi(\omega)|_0 = [(0-3) - (0-0) - 2 \cdot (0-0)] \cdot (\pi/2) = -3\pi/2$$

Παράδειγμα 2

Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=30/[(s+2)\cdot(s+4)\cdot(s+6)]$.

- Έχουμε 3 ευσταθείς πόλους μόνο. Μέσω της (12) θα έχουμε ολική διαφορά φάσης του $G(s)$ (ή καλύτερα του $G(j\omega)$):

$$\Delta\Phi = \Phi(\omega)|_{\infty} - \Phi(\omega)|_0 = [(0-3) - (0-0) - 2 \cdot (0-0)] \cdot (\pi/2) = -3\pi/2$$

- Αλλά,

$$\Phi(\omega)|_0 = 0$$

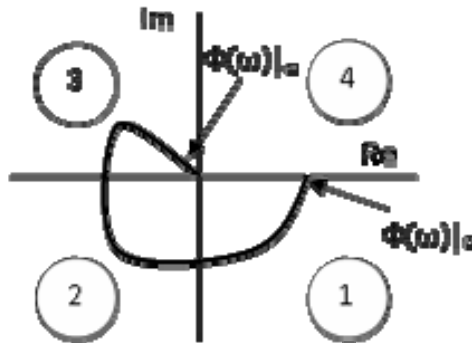
αφού υπάρχουν μόνο ευσταθείς πόλοι με φάση μηδέν για $\omega \rightarrow 0$, **άρα**

$$\Phi(\omega)|_{\infty} = -3\pi/2.$$

Παράδειγμα 2

Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=30/[(s+2)\cdot(s+4)\cdot(s+6)]$.

- Άρα, με ελάχιστο κότπο γνωρίζουμε ότι το διάγραμμα Nyquist του $G(j\omega)$ θα καταλήγει στο τρίτο τεταρτημόριο του επιπέδου μέτρου-φάσης, ενώ ξεκινάει από το πρώτο τεταρτημόριο (βλ. Σχ. 4):

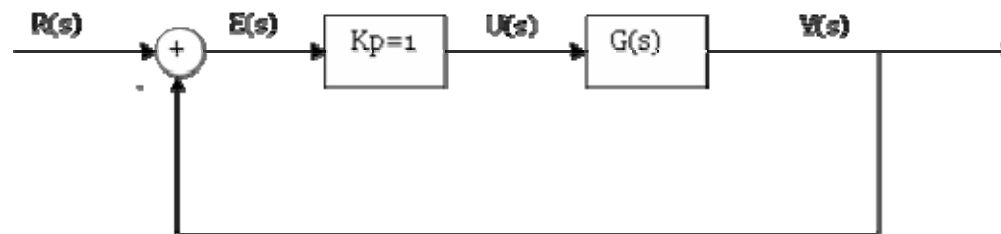


Σχ. 4: Βασική χάραξη του διαγράμματος Nyquist του $G(j\omega)$ με χρήση της ολικής διαφοράς φάσης

**Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό
ανάλογο έλεγχο με χρήση
διαγράμματος Nyquist**

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Με το **διάγραμμα Nyquist του ανοικτού $G(s)$** , ερευνούμε την ευστάθεια του $G(s)$ σε συνδεσμολογία κλειστού βρόχου όπως στο Σχ. 5, πριν καν κατασκευάσουμε και μετρήσουμε αυτό το σύστημα.



Σχ. 5: Συνδεσμολογία κλειστού βρόχου του $G(s)$ υπό ανάλογο έλεγχο $K_p=1$.

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα είναι:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)} = G(s)_{cl-loop} \quad (13)$$

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα είναι:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)} = G(s)_{cl-loop} \quad (13)$$

- Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου έχει
 - M μηδενιστές, N πόλους,
 - M_o «ουδέτερους» μηδενιστές, N_o ουδέτερους πόλους,
 - M_a «ασταθείς» μηδενιστές, N_a ασταθείς πόλους,
 - M_e «ευσταθείς» μηδενιστές και N_e ευσταθείς πόλους.

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα είναι:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)/Q(s)}{1 + K_p \cdot P(s)/Q(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)} = G(s)_{cl-loop} \quad (13)$$

- Τα αντίστοιχα μεγέθη για το ανοικτό $G(s)$ είναι
 - m μηδενιστές, n πόλοι,
 - m_0 «ουδέτεροι» μηδενιστές, n_0 ουδέτεροι πόλοι,
 - m_a «ασταθείς» μηδενιστές και n_a ασταθείς πόλοι,
 - m_e «ευσταθείς» μηδενιστές και n_e ευσταθείς πόλοι.

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Εφόσον για το $G(s)$ $n \geq m$, για τον κλειστό βρόχο ισχύει $N=n$!!
- Συνεχίζοντας με την (13):

$$G(s)_{cl-loop} = \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)} \Rightarrow$$
$$1 + K_p \cdot G(s) = \frac{K_p \cdot G(s)}{G(s)_{cl-loop}} = \frac{\frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s)}}{\frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s) + K_p \cdot P(s)}} = \frac{K_p \cdot P(s)}{Q(s)} = \frac{Q_0(s)}{Q(s)} \quad (14)$$

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Άρα η ολική διαφορά φάσης του συστήματος $[1+K_p \cdot G(s)]$ (όπου $K_p=1$) θα είναι μέσω της (12):

$$\begin{aligned}\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)] &= [(M-N) - (M_o-N_o) - 2 \cdot (M\alpha-N\alpha)] \cdot (\pi/2) = \\ &= [(N-n) - (N_o-n_o) - 2 \cdot (N\alpha-n\alpha)] \cdot (\pi/2) = \\ &= [(n_o-N_o) + 2 \cdot (n\alpha-N\alpha)] \cdot (\pi/2)\end{aligned}\tag{15}$$

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Άρα η ολική διαφορά φάσης του συστήματος $[1+K_p \cdot G(s)]$ (όπου $K_p=1$) θα είναι μέσω της (12):

$$\begin{aligned}\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)] &= [(M-N) - (M_o-N_o) - 2 \cdot (M\alpha-N\alpha)] \cdot (\pi/2) = \\ &= [(N-n) - (N_o-n_o) - 2 \cdot (N\alpha-n\alpha)] \cdot (\pi/2) = \\ &= [(n_o-N_o) + 2 \cdot (n\alpha-N\alpha)] \cdot (\pi/2)\end{aligned}\tag{15}$$

- Αλλά για να υπάρχει ευστάθεια κλειστού βρόχου θα πρέπει να **MHN** υπάρχουν ασταθείς ή ουδέτεροι πόλοι κλειστού βρόχου, δηλαδή

$$N_o=N\alpha=0.$$

Ευστάθεια κλειστού βρόχου υπό ανάλογο έλεγχο με χρήση διαγράμματος Nyquist

- Έτσι ένας ευσταθής κλειστός βρόχος όπως στο Σχ. 5

συνεπάγεται ότι

θα οδηγεί σε σύστημα $[1+K_p \cdot G(s)]$ (με $K_p=1$) με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ολικής διαφοράς φάσης:

- $\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)]=[n_o+2 \cdot n_a] \cdot \pi/2,$ αν το ανοικτό $G(s)$ έχει n_a ασταθείς πόλους και n_o ουδέτερους,
- $\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)]=n_o \cdot \pi/2,$ αν το ανοικτό $G(s)$ έχει μόνο n_o ουδέτερους πόλους,
- $\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)]=0,$ αν το ανοικτό $G(s)$ έχει μόνο ευσταθείς πόλους.

Γραφική ερμηνεία

Γραφική ερμηνεία (1/2)

- Η $\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)]$ (με $K_p=1$) αντιστοιχεί στη γωνία που διαγράφει το βέλος με κέντρο το σημείο Nyquist του διαγράμματος του ανοικτού $G(s)$ γυρνώντας από το σημείο $\Phi(\omega)|_0$ σε αυτό με $\Phi(\omega)|_\infty$,

π.χ. στο ανοικτό $G(s)=30/[(s+2) \cdot (s+4) \cdot (s+6)]$



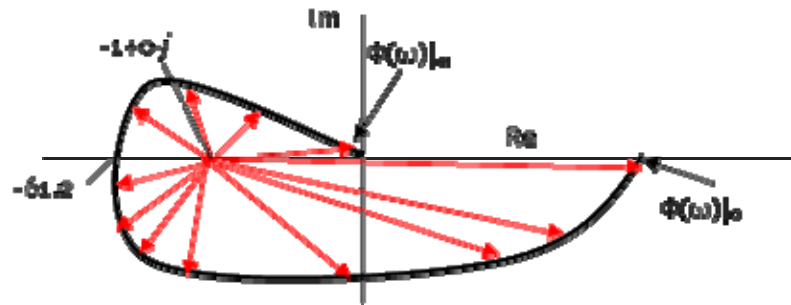
Σχ. 6: Το διάγραμμα Nyquist του $G(s)=30/[(s+2) \cdot (s+4) \cdot (s+6)]$ με την γραφική ερμηνεία της $\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)]$ (με $K_p=1$).

Γραφική ερμηνεία (2/2)

- Αν, αντίθετα, είχαμε ανοικτό

$$G(s)=30000/[(s+2)\cdot(s+4)\cdot(s+6)],$$

τότε το διάγραμμα Nyquist είναι



με $\Delta\Phi[1+K_p \cdot G(s)] \neq 0$ (το βέλος κάνει περιστροφή γύρω από το σημείο Nyquist $-1+0 \cdot j$)

Συμπεράσματα

Συμπέρασμα

- Ευστάθεια κλειστού βρόχου θα έχουμε αν το διάγραμμα Nyquist του ανοικτού συστήματος ΔEN περικλείει το σημείο Nyquist $-1+0\cdot j$ (όπως στο Σχ. 6). Στην αντίθετη περίπτωση ΔEN θα υφίσταται ευστάθεια κλειστού βρόχου.

Συμπέρασμα

- Ευστάθεια κλειστού βρόχου θα έχουμε αν το διάγραμμα Nyquist του ανοικτού συστήματος ΔΕΝ περικλείει το σημείο Nyquist $-1+0\cdot j$ (όπως στο Σχ. 6). Στην αντίθετη περίπτωση ΔΕΝ θα υφίσταται ευστάθεια κλειστού βρόχου.
- Αν υπάρχει ευστάθεια κλειστού βρόχου (Σχ. 6), η απόσταση d (βλ. Σχ. 3) συνδέεται με την οριακή **περιθωρίου κέρδους $K_{περ}$**

$$K_{περ}=1/ d,$$

Συμπέρασμα

- Ευστάθεια κλειστού βρόχου θα έχουμε αν το διάγραμμα Nyquist του ανοικτού συστήματος ΔΕΝ περικλείει το σημείο Nyquist $-1+0\cdot j$ (όπως στο Σχ. 6). Στην αντίθετη περίπτωση ΔΕΝ θα υφίσταται ευστάθεια κλειστού βρόχου.
- Αν υπάρχει ευστάθεια κλειστού βρόχου (Σχ. 6), η απόσταση d (βλ. Σχ. 3) συνδέεται με την οριακή **περιθωρίου κέρδους $K_{περ}$**

$$K_{περ}=1/ d,$$

Αυτό εκφράζει την τιμή μέχρι την οποία μπορεί να αυξηθεί το K_r (από 1 που βρίσκεται) πριν ο κλειστός βρόχος περάσει στην αστάθεια.

Πόσο είναι το $K_{περ}$ στο Σχ. 6;

Συμπέρασμα (2/2)

- Τέλος, χαράσσοντας μοναδιαίο κύκλο με κέντρο στο $(0,0)$ (βλ. Σχ. 3), η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των -180 μοιρών και του σημείου τομής της καμπύλης με τον κύκλο είναι το **περιθώριο φάσης $\varphi_{\text{περ}}$** .

Αυτό εκφράζει ποιο περιθώριο φάσης θα υπάρχει σε κλειστό βρόχο πριν την αστάθεια για το δεδομένο $Kp=1$ που έχουμε.

Παράδειγμα 3

Παράδειγμα 3

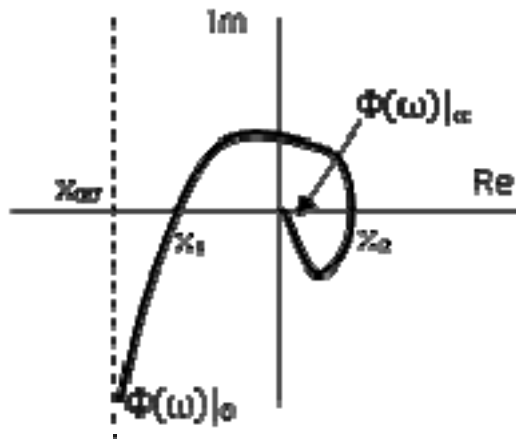
Έστω το σύστημα $G(s)=1/[s \cdot (s+1)^2 \cdot (s+2)^2]$. Θα χαραχθεί προσεγγιστικά το διάγραμμα Nyquist:

- Θα είναι $n=5$, $m=0$, $n_o=1$, άρα χρησιμοποιώντας την (12) θα είναι:

$$\Delta\Phi = \Phi(\omega) \Big|_{\infty} - \Phi(\omega) \Big|_0 = [(m-n) - (m_o-n_o) - 2 \cdot (m_a-n_a)] \cdot (\pi/2) = [-5+1] \cdot (\pi/2) = -2\pi$$

Παράδειγμα 3

- Η $\Phi(\omega)|_0$ θα οφείλεται μόνο στον παράγοντα $1/s$ (και θα είναι ίση με $-\pi/2$) αφού οι άλλοι πόλοι θα έχουν $\Phi(\omega)|_0=0$.
- Άρα $\Phi(\omega)|_\infty = -2\pi + \Phi(\omega)|_0 = -2\pi - \pi/2 = -5\pi/2$ με το βασικό σχήμα του διαγράμματος να είναι κάπως έτσι:



Παράδειγμα 3

- Φυσικά, οφείλουμε να διευκρινίσουμε τα:

$X_{\alpha\sigma}$ από ποιο ύψος του άξονα των πραγματικών ξεκινά για πολύ μικρό ω το διάγραμμα,

X_1 άμεσα συνδεδεμένο με την ευστάθεια του μελλοντικού κλειστού βρόχου και

X_2 τότε τέμνεται ο πραγματικός άξονας για μεγάλα ω .

Έτσι πρέπει να βρούμε την έκφραση του $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{s \cdot (s+1)^2 \cdot (s+2)^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega \cdot (j\omega+1)^2 \cdot (j\omega+2)^2} = \frac{-6 \cdot \omega^2 \cdot (2-\omega^2) - j\omega \cdot (\omega^4 - 13 \cdot \omega^2 + 4)}{\omega^2 (\omega^2 + 1)^2 (\omega^2 + 4)^2}$$

Παράδειγμα 3

- Η τιμή του $x_{\alpha\sigma}$ θα προκύψει από τον παραπάνω μιγαδικό αριθμό για $\omega=0$.

$$G(j\omega) = \frac{1}{s \cdot (s+1)^2 \cdot (s+2)^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega \cdot (j\omega+1)^2 \cdot (j\omega+2)^2} = \frac{-6 \cdot \omega^2 \cdot (2-\omega^2) - j\omega \cdot (\omega^4 - 13 \cdot \omega^2 + 4)}{\omega^2 (\omega^2 + 1)^2 (\omega^2 + 4)^2}$$

Γνωρίζουμε ότι για $\omega=0$ -----> $\text{Im}[G(j\omega)] = -\infty$,
ενώ $\text{Re}[G(j\omega)] = x_{\alpha\sigma}$.

άρα

$$\text{Re}[G(j\omega)] \Big|_{\omega=0} = \frac{-6 \cdot \omega^2 \cdot (2-\omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 + 1)^2 (\omega^2 + 4)^2} \Big|_{\omega=0} = -12/16 = -0.75$$

Παράδειγμα 3

- Το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον πραγματικό άξονα για τιμές του ω όπου $\text{Im}[G(j\omega)]=0$.
- Όταν αυτές οι τιμές βρεθούν, αντικαθίστανται στο $\text{Re}[G(j\omega)]$ οπότε και υπολογίζονται τα x_1 και x_2 . Έχουμε:

$$\text{Im}[G(j\omega)] = \frac{-j\omega \cdot (\omega^4 - 13 \cdot \omega^2 + 4)}{\omega^2 (\omega^2 + 1)^2 (\omega^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 13 \cdot \omega^2 + 4 = 0$$

από όπου προκύπτει ότι $\omega_1=0.56$ και $\omega_2=3.56$.

- Με αντικατάσταση στο $\text{Re}[G(j\omega)]$ θα είναι:

Παράδειγμα 3

- Με αντικατάσταση στο $\text{Re}[G(j\omega)]$ θα είναι:

$$\text{Re}[G(j\omega)]|_{\omega=3.56} = \frac{-6 \cdot \omega^2 \cdot (2 - \omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 + 1)^2 (\omega^2 + 4)^2} |_{\omega=3.56} = 1.4 \cdot 10^{-3} = x_2$$

και

$$\text{Re}[G(j\omega)]|_{\omega=0.56} = \frac{-6 \cdot \omega^2 \cdot (2 - \omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 + 1)^2 (\omega^2 + 4)^2} |_{\omega=0.56} = -0.33 = x_1$$

Άρα

το περιθώριο κέρδους σε μελλοντικό κλειστό βρόχο θα είναι

$$K_{\text{περ}} = 1/0.33 = 3.$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

