ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τ.Τ

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 2

Ενότητα #8: Χώρος Κατάστασης: Μεταβλητές, Εξισώσεις, Κανονικές μορφές

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Συνάρτηση Μεταφοράς και εσωτερική δομή (σήματα) συστήματος.

- Χώρος Κατάστασης και εσωτερική δομή (σήματα) συστήματος - Σχέση με Συνάρτηση Μεταφοράς.

- Μεθοδολογία αναπαράστασης συστήματος στο Χώρος Κατάστασης – Χρήση τυποποιημένων μορφών.

Περιεχόμενα ενότητας

- Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)
- Παρατηρήσεις
- Παράδειγμα
- Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης

Περιεχόμενα ενότητας

- Κανονικές μορφές εξισώσεων κατάστασης (Canonical Forms)
  - Controller Canonical Form (CCF)
  - Observer Canonical Form (OCF)
- Παρατηρήσεις στις εξισώσεις κατάστασης
- Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Έστω σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από τη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y(t)+a_{n-1}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n\text{-}1}}{\mathrm{d}t^{n\text{-}1}}y(t)+a_{n-2}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n\text{-}2}}{\mathrm{d}t^{n\text{-}2}}y(t)+\ldots+a_1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+a_0\cdot y(t)=\\&b_m\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}u(t)+b_{m-1}\cdot\frac{\mathrm{d}^{m\text{-}1}}{\mathrm{d}t^{m\text{-}1}}u(t)+\ldots+b_1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)+b_0\cdot u(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Έστω σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από τη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y(t) + a_{n-1} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{n\text{-}1}}{\mathrm{d}t^{n\text{-}1}} y(t) + a_{n-2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{n\text{-}2}}{\mathrm{d}t^{n\text{-}2}} y(t) + \ldots + a_1 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ &b_m \cdot \tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} u(t) + b_{m-1} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{m\text{-}1}}{\mathrm{d}t^{m\text{-}1}} u(t) + \ldots + b_1 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) + b_0 \cdot u(t)\end{aligned} \qquad (1)$$

- Ο γνωστός, μέχρι τώρα, τρόπος αναπαράστασής του είναι η συνάρτηση μεταφοράς, έστω, G(s) με την ακόλουθη μορφή:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{b_m \mathrm{s}^{\mathrm{m}} + b_{m-1} \cdot \mathrm{s}^{m-1} + b_{m-2} \cdot \mathrm{s}^{m-2} + \ldots + b_1 \cdot \mathrm{s} + b_0}{\mathrm{s}^{\mathrm{n}} + a_{n-1} \cdot \mathrm{s}^{n-1} + a_{n-2} \cdot \mathrm{s}^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot \mathrm{s} + a_0} \qquad (2)$$

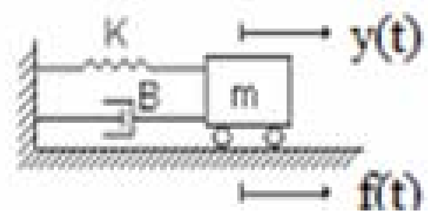
Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Η συνάρτηση μεταφοράς επιτρέπει την απ’ευθείας εύρεση της συνάρτησης εξόδου y(t) για δεδομένη είσοδο u(t) μέσω:
  - Υπολογισμού του Y(s) για το δεδομένο U(s)
  - Ανάλυσης του Y(s) σε απλά κλάσματα και
  - Χρήσης αντίστρ. μετασχηματισμών Laplace για υπολογισμό y(t).

- Δηλαδή, για δεδομένο u(t) μόνο η συγκεκριμένη επιλογή εξόδου είναι άμεσα υπολογίσιμη.

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

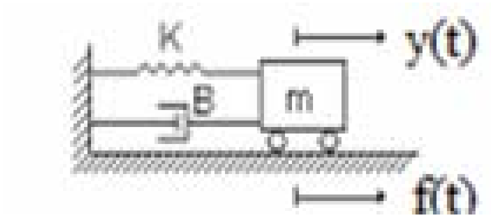
- Π.χ έστω σύστημα μάζας- ελατηρίου- αποσβεστήρα
  - Αν η συνάρτηση μεταφοράς θεωρεί ως <u>είσοδο u(t) τη δύναμη</u> και <u>έξοδο y(t) τη μετατόπιση</u>, μόνο η μετατόπιση είναι δυνατό να υπολογιστεί άμεσα.



Σχ. 1 Σύστημα μάζας, ελατηρίου, αποσβεστήρα

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Π.χ έστω σύστημα μάζας- ελατηρίου- αποσβεστήρα
  - Αν η συνάρτηση μεταφοράς θεωρεί ως είσοδο u(t) τη δύναμη και έξοδο y(t) τη μετατόπιση, μόνο η μετατόπιση είναι δυνατό να υπολογιστεί άμεσα.

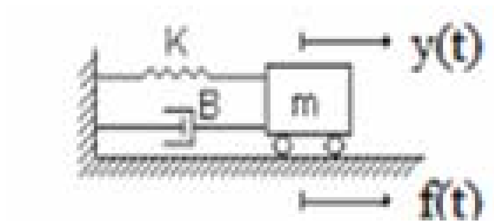


Σχ. 1 Σύστημα μάζας, ελατηρίου, αποσβεστήρα

  - Η ταχύτητα και επιτάχυνση, παρότι εσωτερικά (άρα σημαντικά!) σήματα του συστήματος είναι υπολογίσιμα μόνο έμμεσα, θεωρώντας διαδοχικές παραγώγους της συνάρτησης εξόδου.

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Εναλλακτικά, γίνεται αναπαράσταση της δομής του συστήματος, στον λεγόμενο χώρο κατάστασης (state-space):



μάζα *m*,

ελατήριο *K*,

αποσβεστήρας *B*

είσοδος δύναμη *f*(*t*),
έξοδος μετατόπιση *y*(*t*)

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t)+B\cdot\frac{d}{dt}y(t)+K\cdot y(t)=f(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{B}{m}\cdot\frac{d}{dt}y(t)+\frac{K}{m}\cdot y(t)=\frac{1}{m}f(t) \qquad (3)$$

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Αν θέλουμε συνάρτηση μεταφοράς, άρα υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες για τη μετατόπιση και την ταχύτητα:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{K} \cdot \frac{K/m}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}} \tag{4}$$

- Για την αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης:
  - Θεωρήσατε τόσες βοηθητικές μεταβλητές, όση και η τάξης της διαφορικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} y(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Για την αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης:
  - Θεωρήσατε τόσες βοηθητικές μεταβλητές, όση και η τάξης της διαφορικής εξίσωσης:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) \\
x_2(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} y(t)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Πρακτικά, λοιπόν, οι ονομαζόμενες μεταβλητές κατάστασης αντιστοιχούν στις *n*-1 παραγώγους του συστήματος με διαφορική εξίσωση τάξεως *n*.

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Παραγωγίζοντας την (5) θα έχουμε:

$$\tfrac{d}{dt}x_1(t)=\tfrac{d}{dt}y(t) \quad = \quad \tfrac{d}{dt}x_1(t)=x_2(t)$$

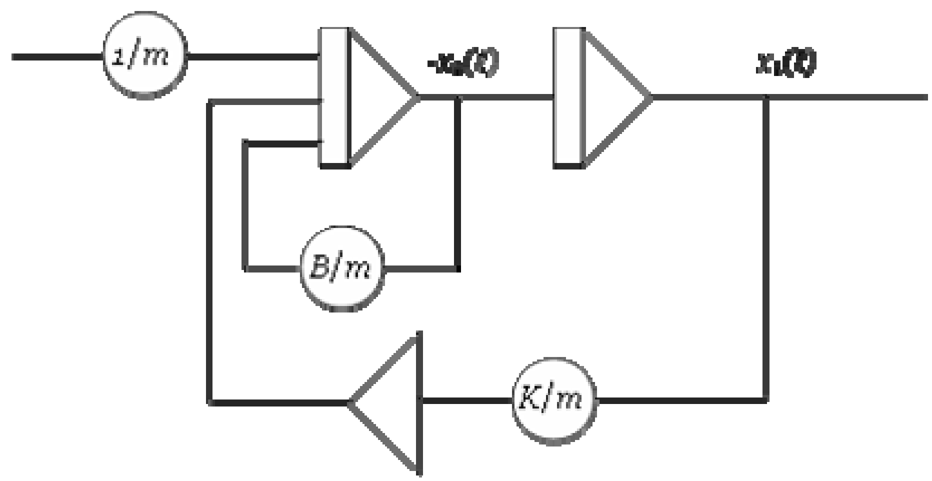
$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}x_2(t)=\tfrac{d^2}{dt^2}y(t) \quad = \quad \tfrac{d}{dt}x_2(t) &= -\frac{B}{m}\cdot\tfrac{d}{dt}y(t)-\frac{K}{m}\cdot y(t)+\frac{1}{m}f(t) \\ &= -\frac{B}{m}\cdot x_2(t)-\frac{K}{m}\cdot x_1(t)+\frac{1}{m}f(t)\end{aligned} \tag{6}$$

Η (6) γράφεται σε μητρωική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -K/m & -B/m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1/m\end{pmatrix}\cdot f(t) \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{d}{dt}\underline{x}(t)=\underline{A}\cdot\underline{x}(t)+\underline{B}\cdot f(t) \\ y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}\cdot f(t) \quad &\Rightarrow \quad y(t)=\underline{C}\cdot\underline{x}(t)+\underline{D}\cdot f(t)\end{aligned} \tag{7}$$

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Στο Σχ. 2 δίδεται και το αναλογικό διάγραμμα του συστήματος:



Σχ. 2 Το αναλογικό διάγραμμα του συστήματος μάζας *m*, ελατηρίου *K*, αποσβεστήρα *B*

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Στην μητρωική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (7) διακρίνουμε:

  – το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}(t)$ που για ένα σύστημα n-οστού βαθμού (άρα με διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης) θα περιέχει τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(t),...,x_n(t)$, και

Αναπαράσταση Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης (State- Space)

- Στην μητρωική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (7) διακρίνουμε:

  – το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}(t)$ που για ένα σύστημα n-οστού βαθμού (άρα με διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης) θα περιέχει τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(t),...,x_n(t)$, και

  – τα μητρώα $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ και $\underline{D}$, που για ένα σύστημα n-οστού βαθμού θα πρέπει να έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις ώστε να ικανοποιείται η μητρωική εξίσωση (7).

  Το $\underline{A}$ θα έχει διάσταση $n \times n$, ενώ η αντίστοιχη του $\underline{B}$ θα είναι $n \times 1$.

Παρατηρήσεις

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε ότι:
  - Στην αναπαράσταση ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης η μεταβλητή εξόδου προκύπτει σαν συνδυασμός όλων των **μεταβλητών κατάστασης** που εξελίσσονται και μπορούν να καταγραφούν κατά τη διάρκεια του πειράματος.

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε ότι:
  - Στην αναπαράσταση ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης η μεταβλητή εξόδου προκύπτει σαν συνδυασμός όλων των **μεταβλητών κατάστασης** που εξελίσσονται και μπορούν να καταγραφούν κατά τη διάρκεια του πειράματος.
  - Οι **μεταβλητές κατάστασης αντιστοιχούν σε όλα τα «εσωτερικά» σήματα** που υπάρχουν και εξελίσσονται κατά τη διάρκεια ενός πειράματος με το σύστημα.

Παρατηρήσεις

- Παρατηρήσατε ότι:
  - Στην αναπαράσταση ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης η μεταβλητή εξόδου προκύπτει σαν συνδυασμός όλων των **μεταβλητών κατάστασης** που εξελίσσονται και μπορούν να καταγραφούν κατά τη διάρκεια του πειράματος.
  - Οι **μεταβλητές κατάστασης αντιστοιχούν σε όλα τα «εσωτερικά» σήματα** που υπάρχουν και εξελίσσονται κατά τη διάρκεια ενός πειράματος με το σύστημα.
  - Τα «εσωτερικά» σήματα είναι, τώρα, απολύτως παρατηρήσιμα σε αντίθεση με ότι συνέβαινε για τη συνάρτηση μεταφοράς.

    Έτσι π.χ. καταγράφουμε την ταχύτητα της μάζας για το δεδομένο σύστημα του Σχ. 1, με την επιλογή μητρώου $\underline{C}$=[0 1].

Παρατηρήσεις

– Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος επιλογής μεταβλητών κατάστασης. Θα μπορούσαμε στο παράδειγμά μας να επιλέξουμε $x_1(t)$=d/dt[$y(t)$], $x_2(t)=y(t)$.

Παρατηρήσεις

– Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος επιλογής μεταβλητών κατάστασης. Θα μπορούσαμε στο παράδειγμά μας να επιλέξουμε $x_1(t)$=d/dt[$y(t)$], $x_2(t)=y(t)$.

– Γενικά, όπως φαίνεται και από το Σχ. 2, μια τυπική επιλογή **μεταβλητών κατάστασης** αντιστοιχεί

- στις εξόδους των ολοκληρωτών, ή
- στις μεταβλητές των στοιχείων που συσσωρεύουν ενέργεια.

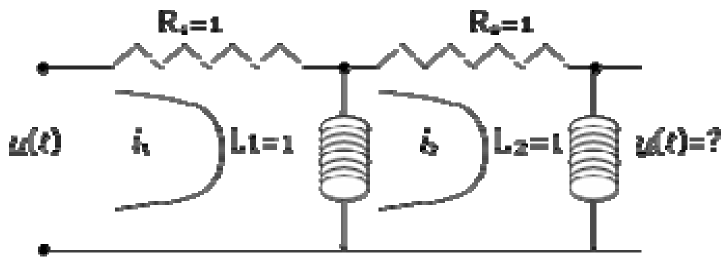
Παρατηρήσεις

- Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος επιλογής μεταβλητών κατάστασης. Θα μπορούσαμε στο παράδειγμά μας να επιλέξουμε $x_1(t)=\mathrm{d}/\mathrm{d}t[y(t)]$, $x_2(t)=y(t)$.
- Γενικά, όπως φαίνεται και από το Σχ. 2, μια τυπική επιλογή **μεταβλητών κατάστασης** αντιστοιχεί
  - στις εξόδους των ολοκληρωτών, ή
  - στις μεταβλητές των στοιχείων που συσσωρεύουν ενέργεια.
- Σε πρακτικό επίπεδο, επιτυγχάνεται αναπαράσταση του συστήματος με *n* διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης που γράφονται σε μητρωική μορφή [βλ. σετ εξισώσεων (7)], αντί με μία διαφορική *n*-οστής τάξης

Παράδειγμα

Παράδειγμα

Δίδεται το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχ. 3 που θα πρέπει να γραφεί στο χώρο κατάστασης.



Σχ. 3: Ηλεκτρικό κύκλωμα RL-RL

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο εντάσεων βρόχων θα έχουμε την ακόλουθη μητρωική αναπαράσταση:

$$\begin{pmatrix} R_1 + s\cdot L_1 & -s\cdot L_1 \\ -s\cdot L_1 & R_2 + s\cdot L_1 + s\cdot L_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(s) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Παράδειγμα

- και με αντικατάσταση των τιμών των αντιστάσεων και πηνίων:

$$\begin{pmatrix} 1+s & -s \\ -s & 1+2\cdot s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(s) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

ενώ

$$y(t) = L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) \Rightarrow Y(s) = s \cdot L_2 \cdot I_2(s) = s \cdot I_2(s) \qquad (10)$$

Από τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν από την (9) με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$\begin{aligned} &(1+s)\cdot I_1(s) - s \cdot I_2(s) = U(s) \\ &-s \cdot I_1(s) + (1+2\cdot s)\cdot I_2(s) = 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{L^{-1}} \quad \begin{aligned} &i_1(t) + \frac{d}{dt} i_1(t) - \frac{d}{dt} i_2(t) = u(t) \\ &-\frac{d}{dt} i_1(t) + i_2(t) + 2\cdot \frac{d}{dt} i_2(t) = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Παράδειγμα

λύνοντας την πρώτη των (11) ως προς d/dt[i_1(t)] και αντικαθιστώντας στη δεύτερη των (11):

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = -i_1(t) - i_2(t) + u(t) \quad (12)$$

οπότε και η δεύτερη των (11) θα γραφεί μέσω της (12) ως εξής:

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = -2 \cdot i_1(t) - i_2(t) + 2 \cdot u(t) \quad (13)$$

και, άρα, μέσω της (12) η (10) γίνεται:

$$y(t) = L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) = \frac{d}{dt} i_2(t) = -i_1(t) - i_2(t) + u(t) \quad (14)$$

Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης

Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης

- Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης: Ποια στοιχεία συσσωρεύουν ενέργεια;
  - Τα δύο πηνία, άρα σαν μεταβλητές κατάστασης επιλέγονται οι εντάσεις των ρευμάτων $i_1(t)$ και $i_2(t)$.
  - Έτσι $x_1(t)=i_1(t)$ και $x_1(t)= i_2(t)$.

Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης

- Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης: Ποια στοιχεία συσσωρεύουν ενέργεια;
  - Τα δύο πηνία, άρα σαν μεταβλητές κατάστασης επιλέγονται οι εντάσεις των ρευμάτων $i_1(t)$ και $i_2(t)$.
  - Έτσι $x_1(t)=i_1(t)$ και $x_1(t)= i_2(t)$.

Με τον τρόπο αυτό οι (12), (13) και (14) λαμβάνουν τη μορφή:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\
&\frac{d}{dt}x_1(t) = -2\cdot x_1(t) - x_2(t) + 2\cdot u(t) \\
&y(t) = -x_1(t) - x_2(t) + u(t)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης

η τελικά σε μητρωική μορφή:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \underline{x}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot u(t) \qquad (16)$$

Παρατήρηση: Από τις εξισώσεις (11) με επίλυση του 2X2 συστήματος η συνάρτηση μεταφοράς *Y*(*s*)/*U*(*s*) προκύπτει ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} &(1+s) \cdot I_1(s) - s \cdot I_2(s) = U(s) \\ &-s \cdot I_1(s) + (1+2\cdot s) \cdot I_2(s) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 3 \cdot s + 1} \qquad (17)$$

Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης

Παρατήρηση: Από τις εξισώσεις (11) με επίλυση του 2Χ2 συστήματος η συνάρτηση μεταφοράς $Y(s)/U(s)$ προκύπτει ως ακολούθως:

$$\begin{array}{l} (1+s)\cdot I_1(s) - s\cdot I_2(s) = U(s) \\ -s\cdot I_1(s) + (1+2\cdot s)\cdot I_2(s) = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{s^2+3\cdot s+1} \qquad (17)$$

*Συγκρίνοντας τις (14) και (17), διαπιστώνεται ότι **όταν n=m, εμφανίζεται μη-μηδενικό μητρώο D στις αντίστοιχες εξισώσεις κατάστασης**.*

Κανονικές μορφές εξισώσεων κατάστασης (Canonical Forms)

Κανονικές μορφές εξισώσεων κατάστασης (Canonical Forms)

- Γενικά, ένα σύστημα θα έχει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση και συνάρτηση μεταφοράς:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dt}^n} y(t) + a_{n-1} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{dt}^{n-1}} y(t) + a_{n-2} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{dt}^{n-2}} y(t) + \ldots + a_1 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} y(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ &b_m \cdot \tfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{dt}^m} u(t) + b_{m-1} \cdot \tfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{dt}^{m-1}} u(t) + \ldots + b_1 \cdot \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(t) + b_0 \cdot u(t)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{b_m \mathrm{s}^{\mathrm{m}} + b_{m-1} \cdot \mathrm{s}^{m-1} + b_{m-2} \cdot \mathrm{s}^{m-2} + \ldots + b_1 \cdot \mathrm{s} + b_0}{\mathrm{s}^{\mathrm{n}} + a_{n-1} \cdot \mathrm{s}^{n-1} + a_{n-2} \cdot \mathrm{s}^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot \mathrm{s} + a_0}$$

Κανονικές μορφές εξισώσεων κατάστασης (Canonical Forms)

- Για αποφυγή της χρονοβόρας επεξεργασίας των διαφορικών εξισώσεων ενός συστήματος για την αναπαράστασή του στο χώρο κατάστασης, υπάρχουν **τυποποιημένοι τρόποι** για τη γραφή μιας διαφορική εξίσωση n-οστής στο χώρο κατάστασης, εφόσον ισχύει ότι $n>m$.

- Οι μορφές μητρωικών εξισώσεων που προκύπτουν αναφέρονται ως κανονικές μορφές (Canonical Forms).

Κανονικές μορφές εξισώσεων κατάστασης (Canonical Forms)

Controller Canonical Form (CCF)

Controller Canonical Form (CCF)

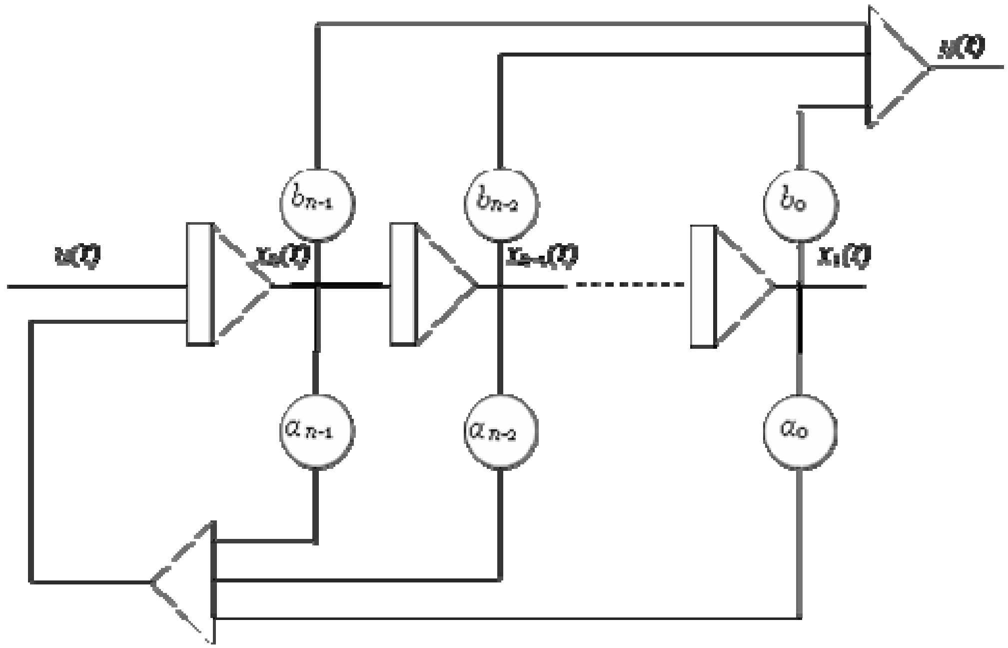
- Η κανονική μορφή αυτή έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Controller Canonical Form (CCF)

- Η (19) Controller Canonical Form (CCF), αν παραβλέψουμε την αναστροφή πρόσημων λόγω των ενισχυτών, έχει το αναλογικό διάγραμμα του Σχ. 4:



Σχ. 4: Αναλογικό διάγραμμα της μορφής Controller Canonical Form (έχουμε παραβλέψει την αναστροφή πρόσημων λόγω των ενισχυτών)

Κανονικές μορφές εξισώσεων κατάστασης (Canonical Forms)

Observer Canonical Form (OCF)

Observer Canonical Form (OCF)

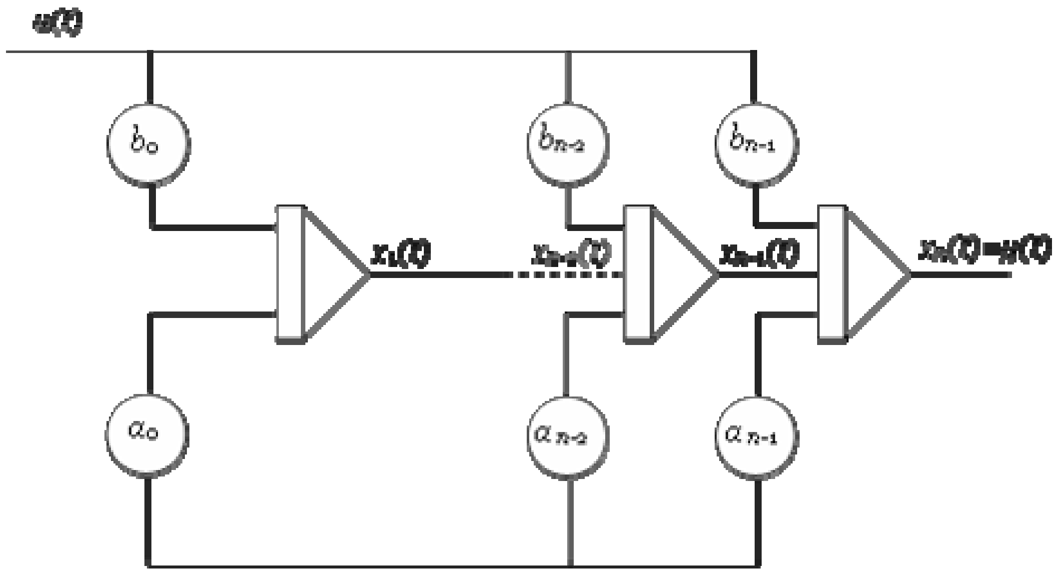
- Μια άλλη κανονική μορφή είναι αυτή που δίδεται στις εξισώσεις (20) και αναφέρεται ως Observer Canonical Form (OCF):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \cdot u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Observer Canonical Form (OCF) (2/2)

- Το αναλογικό διάγραμμα της Observer Canonical Form (OCF) δίδεται στο Σχ. 5:



Σχ. 5: Αναλογικό διάγραμμα της μορφής Observer Canonical Form (έχουμε παραβλέψει την αναστροφή πρόσημων λόγω των ενισχυτών)

Παρατηρήσεις στις εξισώσεις κατάστασης

Παρατηρήσεις

- Αν για τη διαφορική εξίσωση/ συνάρτηση μεταφοράς ισχύει *n*=*m*, όπως έγινε στην περίπτωση του κυκλώματος RL-RL του Σχ.3, η αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης είναι δυνατή με τη χρήση των CCF (19) και OCF (20), ως εξής:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{s^2+3\cdot s+1} = \frac{s^2 \pm (3\cdot s+1)}{s^2+3\cdot s+1} = 1 - \frac{3\cdot s+1}{s^2+3\cdot s+1}$$
$$\Rightarrow Y(s) = U(s) - \frac{3\cdot s+1}{s^2+3\cdot s+1}\cdot U(s) = U(s) - Y_1(s) \qquad (21)$$

Παρατηρήσεις

- Αν για τη διαφορική εξίσωση/ συνάρτηση μεταφοράς ισχύει *n=m*, όπως έγινε στην περίπτωση του κυκλώματος RL-RL του Σχ.3, η αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης είναι δυνατή με τη χρήση των CCF (19) και OCF (20), ως εξής:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2}{s^2+3\cdot s+1}=\frac{s^2\pm(3\cdot s+1)}{s^2+3\cdot s+1}=1-\frac{3\cdot s+1}{s^2+3\cdot s+1}$$
$$\Rightarrow Y(s)=U(s)-\frac{3\cdot s+1}{s^2+3\cdot s+1}\cdot U(s)=U(s)-Y_1(s) \qquad (21)$$

Απλά, το Y(s) προκύπτει έτσι ως άθροισμα του γνωστού και καθορισμένου U(s) και του Y_1(s) που έρχεται από ένα υποσύστημα που επίσης τροφοδοτείται από U(s).

Παρατηρήσεις

- Άρα, αρκεί να θέσουμε σε CCF ή OCF το υποσύστημα που παράγει το $Y_1(s)$ και κατόπιν να κάνουμε την πράξη που επιβάλλει η δεύτερη από τις (21). Για το $Y_1(s)$ σε CCF θα έχουμε με βάση την (19) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{x}(t) = \underline{A}\cdot\underline{x}(t) + \underline{B}\cdot u(t)$$
$$y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = \underline{C}\,|_{y_1}\cdot\underline{x}(t) \tag{22}$$

και εφόσον από την (21)

$$Y(s) = U(s) - Y_1(s) \Rightarrow y(t) = u(t) - y_1(t) = (-1 \quad -3)\cdot\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (1)\cdot u(t) \tag{23}$$

Παρατηρήσεις

- Τελικά συνδυάζοντας τα παραπάνω, για το συνολικό σύστημα *Y*(*s*)/*U*(*s*) τα μητρώα $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ και $\underline{D}$ δίδονται ως:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\ \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix},\ \underline{D} = (1)$$

Παρατηρήσεις

- Τελικά συνδυάζοντας τα παραπάνω, για το συνολικό σύστημα *Y*(*s*)/*U*(*s*) τα μητρώα $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ και $\underline{D}$ δίδονται ως:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \ \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}, \ \underline{D} = (1)$$

- Προσοχή:
  - Τα μητρώα $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ και $\underline{D}$ που μόλις υπολογίσαμε είναι διαφορετικά από αυτά που βρήκαμε στην (16).
  - Γενικά **δεν υπάρχει μοναδική έκφραση** του συστήματος στο χώρο κατάστασης, αντιθέτως από ότι συμβαίνει για τη **συνάρτηση μεταφοράς αυτού η οποία έχει μια και μοναδική μορφή**.

Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

- Έχοντας την έκφραση συστήματος στο χώρο κατάστασης, υπολογίζουμε εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς του. Έστω :

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\underline{x}(t) = \underline{A}\cdot\underline{x}(t) + \underline{B}\cdot u(t)$$
$$y(t) = \underline{C}\cdot\underline{x}(t) + \underline{D}\cdot u(t)$$

εφαρμόζοντας μετ/μο Laplace θα λάβουμε:

$$\begin{aligned} s\cdot\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{A}\cdot\underline{X}(s) + \underline{B}\cdot U(s) \\ \mathrm{Y}(s) &= \underline{C}\cdot\underline{X}(s) + \underline{D}\cdot U(s) \end{aligned} \qquad (24)$$

Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Από την πρώτη των (24) προκύπτει:

$$\underline{X}(s) = (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{x}(0) + (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} \cdot U(s) \tag{25}$$

και μέσω της (25) η δεύτερη των (24) γίνεται:

$$Y(s) = \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{x}(0) + \{\underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D}\} \cdot U(s) \tag{26}$$

Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς συστήματος θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε και η (26) γίνεται:

$$Y(s) = \{\underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D}\} \cdot U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D} \qquad (27)$$

Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς συστήματος θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε και η (26) γίνεται:

$$Y(s) = \{\underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D}\} \cdot U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D} \qquad (27)$$

• Οι πόλοι του συστήματος προκύπτουν από την εξίσωση της ορίζουσας det($s \cdot \underline{I} - \underline{A}$)=0.

Μετατροπή εξισώσεων κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς συστήματος θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε και η (26) γίνεται:

$$Y(s) = \{\underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D}\} \cdot U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{C} \cdot (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D} \qquad (27)$$

- Οι πόλοι του συστήματος προκύπτουν από την εξίσωση της ορίζουσας $\det(s \cdot \underline{I} - \underline{A}) = 0$.
- Παρατηρώντας καλύτερα, η επίλυση του $\det(s \cdot \underline{I} - \underline{A}) = 0$ αντιστοιχεί στην εύρεση των ιδιοτιμών του μητρώου $\underline{A}$:

Οι ιδιοτιμές λ_i, $i=1,\ldots,n$ του μητρώου $\underline{A}$ <u>είναι</u> οι πόλοι του συστήματος.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ